3. Mathematikschulaufgabe

Klasse 8 / (G8)

- Lösungen -

1. a) Die Anzahl der Elementarereignisse ist gleich $3 \cdot 3 = \underline{\underline{9}}$
$\{ NN, NT, NH, TN, TT, TH, HN, HT, HH \}$

b) $P(A) = 25\% + 60\% = \underline{\underline{85\%}}$

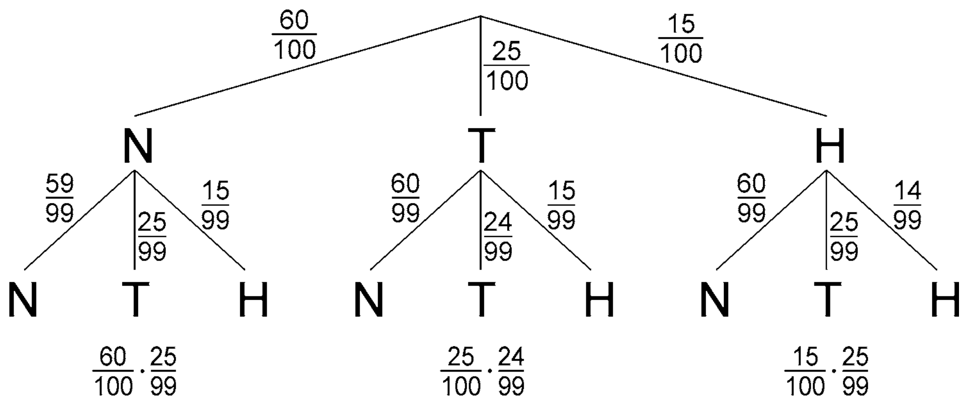
$P(B) = \frac{60}{100} \cdot \frac{25}{99} + \frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99} + \frac{15}{100} \cdot \frac{25}{99} = \frac{5}{33} + \frac{2}{33} + \frac{5}{132} = \frac{7}{33} + \frac{5}{132} = 0,25$ oder $\underline{\underline{25\%}}$

$P(C) = 1 - P(\text{"kein Gewinn bei Trostpreis u. Hauptgewinn"})$

$= 1 - \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99}$

$= 0,6424$ oder $\underline{\underline{64,24\%}}$

Baumdiagramm:
N: Niete (60), T: Trostpreis (25), H: Hauptgewinn (15)



2. a) P(„alle Würfel die gleiche Augenzahl zeigen“) $= \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}}$

b) P(„keine Sechs gewürfelt“) $= \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{125}{216}}}$

c) P(„drei verschiedene Augenzahlen liegen oben“) $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$

3. a) Es gibt $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten
(falls es keine Rolle spielt wer neben wem steht)

b) Die Wahrscheinlichkeit daß die beiden Frauen nebeneinander stehen ist dann

$\frac{(4 \cdot 2!) \cdot 3!}{120} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{120} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$

- Lösungen -

4. geg.: $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

a) **Waagerechte Asymptote**

Die waagereche Asymptote ist meist schwieriger zu ermitteln wie die senkrechte Asymptote weil nicht nur der Nenner sondern gleichzeitig auch der Zähler des Funktionsterms eine Rolle spielt.

Die waagerechte Asymptote ist die Grenze an die sich der Funktiongraph beliebig nahe anschmiegt bzw. der Funktionswert f(x) liegt beliebig nahe an dieser Grenze. Oder mathematischer ausgedrückt:
Es ist der Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ zu betrachten.

Der Funktionsterm wird zu diesem Zweck so umgeformt daß x nur noch im Nenner-Term vorkommt.:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x-2)+4}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{4}{x-2} = \underline{1+\frac{4}{x-2}}$$

Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ d.h. wenn x sehr (unendlich) groß würde, wäre der Wert des Bruches sehr (unendlich) klein, praktisch Null, weil x im Nenner liegt. Es gibt aber keine Zahl für x die man einsetzen könnte damit der Bruch Null wird.
Die Gleichung der waagerechten Asymptote lautet somit: $\underline{\underline{y = 1}}$

b) $$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)} \quad \frac{\text{(3. binom. Formel)}}{\text{(2. binom. Formel)}} \quad \text{siehe a)}$$

Der Nenner würde Null werden wenn man x = 2 einsetzen würde.
Maximale Definitionsmenge: $\underline{\underline{D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}}}$

Nullstellen:

Nullstellen existieren dort wo der Funktionsterm Null ist; d.h. $f(x) = 0$
(Der Funktionsgraph schneidet an dieser Stelle die x-Achse)

Aus $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$ erhält man die

Nullstellen: $x_0 = 2$ (keine Lösg. wegen D)

$\underline{\underline{x_0 = -2}}$

c) Definitionslücke auch Polstelle genannt:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x-2}$$

Für $x = 2$ liegt eine Definitionslücke vor (Der Nenner des Bruches würde dort Null werden).

- Lösungen -

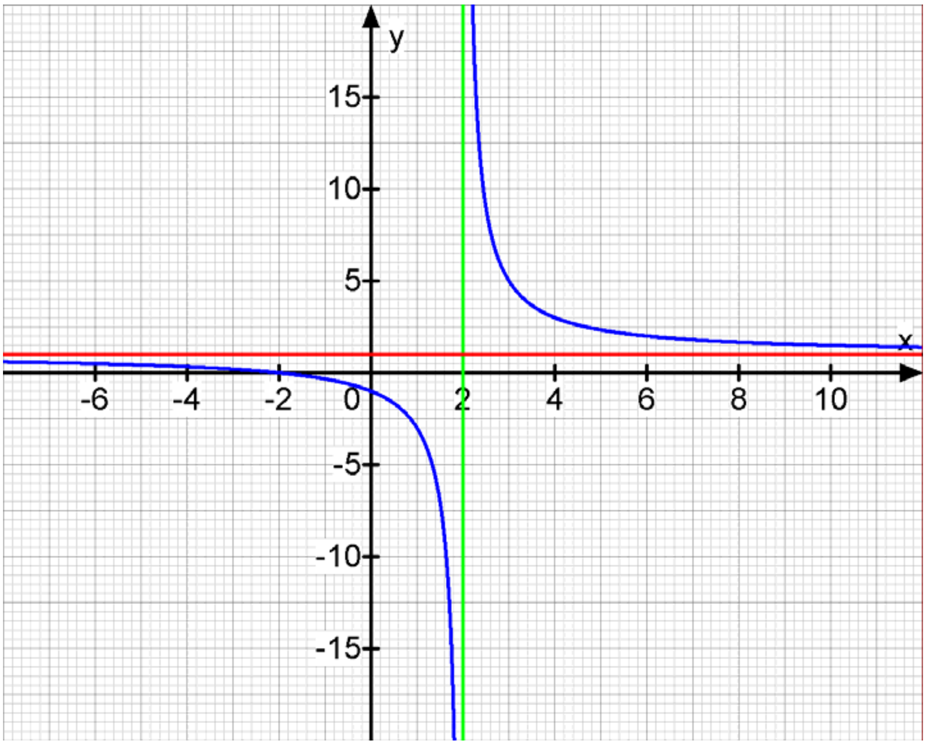
Verhalten von f in der Nähe der Definitionslücke:

Je näherer man beim Einsetzen für x an die 2 herankommt, desto kleiner wird die Differenz $x-2$ (Beispiel: $x = 2{,}00001 \;\Rightarrow\; x-2 = 2{,}00001 - 2 = 0{,}00001$).

Man kann das Verhalten bei Annäherung an die Definitionslücke bzw. für sehr große / kleine x-Werte auch mit Hilfe einer Wertetabelle untersuchen:

x	-100	-1000	-10000	2	1,99	1,999	2,001	2,0001	100	5000
y	0,96	0,996	0,9996	n. def.	-399	-3999	4001	40001	1,04	1,0008

Schaubild der Funktion mit eingezeichneter waagerechter Asymptote und Polstelle



5. geg.: $\dfrac{x^2+2y}{x^2+25y^2+10xy} = \dfrac{x^2+2y}{(x+5y)^2} = \underline{\dfrac{x^2+2y}{(x+5y)(x+5y)}}$

$\dfrac{x-5y}{6x+30y} = \underline{\dfrac{x-5y}{6(x+5y)}}$

$\underline{\dfrac{4}{9x}}$

Hauptnenner:

$\underline{\underline{18x(x+5y)(x+5y)}}$

Erweiterungsfaktoren:	Nebenrechnung:
1. Bruch: 18x	$\dfrac{18x\cancel{(x+5y)}\cancel{(x+5y)}}{\cancel{(x+5y)}\cancel{(x+5y)}} = 18x$
2. Bruch: $3x(x+5y)$	$\dfrac{18x(x+5y)\cancel{(x+5y)}}{6\cancel{(x+5y)}} = 3x(x+5y)$
3. Bruch: $2(x+5y)(x+5y)$	$\dfrac{18x(x+5y)(x+5y)}{9x} = 2(x+5y)(x+5y)$