2. Mathematikschulaufgabe

Klasse 10 / (G8)

- Lösungen -

1. a) Es handelt sich gemäß Aufgabenstellung um exponenzielles Wachstum:

Formel für expon. Wachstum:

$f(x) = b \cdot a^x$

Wachstumsfaktor: $a = 1 + \frac{0,5}{100} = 1,005$

Startwert: $b = 81\,817\,000$

Zeit: x = Anzahl der Jahre

$\underline{\underline{f(x) = 81\,817\,000 \cdot 1,005^x}}$

b) $x = 2008 - 1995 = 13$ (Jahre)

$f(13) = 81\,817\,000 \cdot 1,005^{13}$

$\underline{\underline{f(13) = 87\,297\,610}}$ (Einwohner)

c) $f(13) = 82\,218\,000$

$f(13) = 81\,817\,000 \cdot a^{13} = 82\,218\,000$

$a = \sqrt[13]{\frac{82\,218\,000}{81\,817\,000}}$

$\underline{a \approx 1,000376}$

Prozentsatz: $p = a - 1 = 1,000376 - 1 = 0,000376 = \underline{\underline{0,0376\%}}$

2. a) $\log_x 0,5 = -0,125$

$x^{-0,125} = 0,5$

$x^{-\frac{1}{8}} = 0,5$

$\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}} = 0,5$

$1 = 0,5 \cdot x^{\frac{1}{8}}$

$x^{\frac{1}{8}} = 2$

$\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^8 = 2^8$

$\underline{\underline{x = 2^8 = 256}}$

$x = \log_{0,25} 32$

$x = \frac{\lg 32}{\lg 0,25}$

$\underline{\underline{x = -2,5}}$

- Lösungen -

2. b)

$$\log_a\sqrt{\frac{a(b-1)}{b^2-1}} =$$
$$\log_a\sqrt{\frac{a(b-1)}{(b-1)(b+1)}} =$$
$$\log_a\sqrt{\frac{a}{(b+1)}} =$$
$$\log_a\left(\frac{a}{(b+1)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\log_a\left(\frac{a}{(b+1)}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\log_a a-\frac{1}{2}\cdot\log_a(b+1) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\log_a(b+1) =$$
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}\left[1-\log_a(b+1)\right]}}$$

c)

$$\frac{1}{2}\cdot\lg(a-1)-\lg\sqrt{a^2-1}+\frac{\lg\left(a^3+a^2\right)}{\lg 100} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\lg(a-1)-\frac{1}{2}\cdot\lg\left(a^2-1\right)+\frac{\lg\left(a^3+a^2\right)}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lg(a-1)-\lg\left(a^2-1\right)+\lg\left(a^3+a^2\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lg(a-1)-\lg((a-1)(a+1))+\lg\left(a^2(a+1)\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lg\frac{(a-1)}{(a-1)(a+1)}+\lg\left(a^2(a+1)\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lg\frac{1}{(a+1)}+\lg a^2+\lg(a+1)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lg(a+1)^{-1}+\lg a^2+\lg(a+1)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[-\lg(a+1)+\lg a^2+\lg(a+1)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\lg a^2 =$$
$$\lg\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\lg a}}$$

3. a) Aus dem gegebenen Diagramm sind ablesbar:

Amplitude: a = 0,5 (Amplitude = Maximalwert)

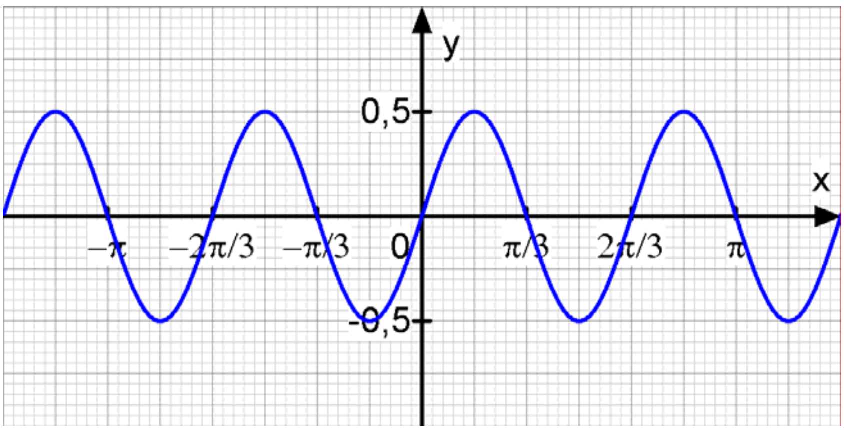
Periode: $p=\frac{2\pi}{3}$

Die gegebene Sinuskurve hat gegenüber der Normalkurve $(y=\sin x)$ eine kürzere Amplitude und Periodenlänge p.

Die allgemeine Gleichung lautet:

$$f(x)=a\cdot\sin(b\,x) \quad \text{mit} \quad b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=2\pi\cdot\frac{3}{2\pi}=3$$

$$\underline{\underline{f(x)=0{,}5\cdot\sin(3x)}}$$



- Lösungen -

b) erste positive Nullstelle:
$N(\pi/0)$, da Periode $p = 2\pi$

erster positiver Tiefpunkt:
(x - Koordinate)
$P\left(\frac{3}{2}\pi / -5\right)$

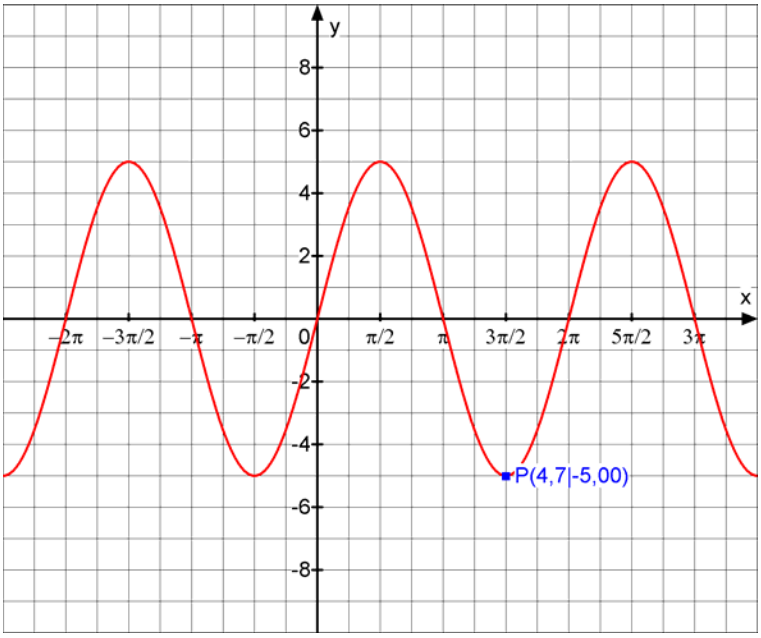
$f(x) = 5 \cdot \sin x = -5$

$\sin x = \frac{-5}{5} = -1$

$x = -1{,}57 = -\frac{\pi}{2}$

1. positiver Tiefpunkt:

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3}{2}\pi$



Wertemenge: $W = [-5; 5]$ (wegen der Amplitude 5)

c) geg.: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x - \frac{5\pi}{4}\right)$ allgemein: $f(x) = a \cdot \sin\left[b\left(x \pm \frac{c}{b}\right)\right] \pm d$

Verschiebung um $\frac{3\pi}{4}$ nach links:

$\frac{c}{b} = -\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

Verschiebung des Graphen um 3,5 nach unten:
$d = -3{,}5$

Erhöhung der Amplitude um 1,25:
$a = 0{,}5 + 1{,}25 = 1{,}75$

Bestimmung der Periode:

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{5\pi}{4}$

$b = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \cdot \frac{4}{5\pi} = \frac{8}{5}$

Die Gleichung lautet:

$f(x) = a \cdot \sin\left[b\left(x \pm \frac{c}{b}\right)\right] \pm d$

$f(x) = 1{,}75 \cdot \sin\left[\frac{8}{5}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 3{,}5$

- Lösungen -

Veränderung gegenüber der Grundfunktion $f(x) = \sin(x)$:

$$f(x) = 1{,}75 \cdot \sin\left[\frac{8}{5}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 3{,}5$$

- $-3{,}5$: Verschiebung nach unten
- $\frac{\pi}{2}$: Verschiebung nach rechts (Minuszeichen !)
- $\frac{8}{5}$: Perioden-Faktor
- $1{,}75$: Amplitude