1. Mathematikschulaufgabe

Klasse 11 / G8

- Lösungen -

1. a) $f(x) = 8\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}$; $\quad f'(x) = 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = 2a \cdot x^{\frac{4}{5}}$; $\quad f'(x) = 2a \cdot \frac{4}{5} x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{8}{5} \cdot a \cdot x^{-\frac{1}{5}}$

c) $f(x) = \frac{12}{x} \cdot \cos x$; $\quad f'(x) = -\frac{12}{x^2} \cdot \cos x - \frac{12}{x} \cdot \sin x$

d) $f(x) = \sin^2 x$; $\quad f'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

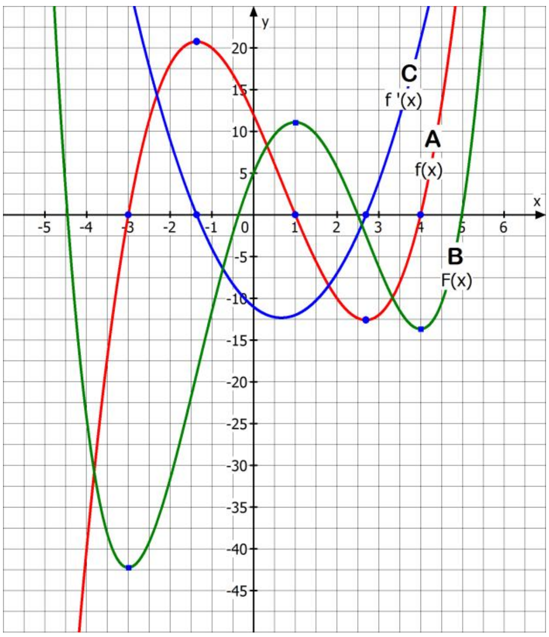
e) $f(x) = \frac{2}{x^4 + 5}$; $\quad f'(x) = \frac{0 \cdot \left(x^4 + 5\right) - 2 \cdot 4x^3}{\left(x^4 + 5\right)^2} = -\frac{8x^3}{\left(x^4 + 5\right)^2}$

f) $x^3 \cdot \cos(2x+1)$; $\quad f'(x) = x^3 \cdot \left(-2\sin(2x+1)\right) + 3x^2 \cdot \cos(2x+1)$

$f'(x) = -2x^3 \cdot \sin(2x+1) + 3x^2 \cdot \cos(2x+1)$

(Es gilt: $f(x) = a \cdot \cos x \;\Rightarrow\; f'(x) = -a \cdot \sin x$)

2. Es handelt sich bei diesen Funktionen um ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) n-ten Grades.



<u>Die einfachste Erklärung</u>:

Graph C ist 2. Grades (2 NST),
Graph A ist 3. Grades (3 NST),
Graph B ist 4. Grades (4 NST).

Weil sich Ableitung, Funktion und Stammfunktion jeweils um einen Grad unterscheiden, ist

Graph B die Stammfunktion $F(x)$,

Graph A die Funktion $f(x)$,

Graph C die Ableitung $f'(x)$.

<u>Eine weitere Erklärung</u>:

An den Extremstellen von Graph A ($x \approx -1{,}4$ und $x \approx 2{,}7$) wechselt jeweils das Vorzeichen (der Tangentensteigung). Diese Stellen sind gleichzeitig die NST der Ableitungsfunktion. Also ist Graph A die Funktion und Graph C seine Ableitung.

Graph B hat drei Extremwerte bei $x = -3; x = 1; x = 4$. Diese Punkte sind im Graph A die Nullstellen. Somit ist Graph B die Stammfunktion.

- Lösungen -

3. Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^2+kx}{x-5}$ mit $k\in\mathbb{R}$.

a) 1. Ableitung:

Quotientenregel:

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

Kurzform: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

$u=x^2+kx;\quad u'=2x+k$

$v=x-5;\quad v'=1$

$$f'(x)=\frac{(2x+k)(x-5)-\left(x^2+kx\right)\cdot 1}{(x-5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-10x+kx-5k-x^2-kx}{(x-5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-10x-5k}{(x-5)^2}$$

b) Horizontale Tangente bedeutet lokale Extrempunkte; die Steigung des Graph ist an diesen Stellen Null:

$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-10x-5k=0$

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Genau zwei Lösungen bedeutet für die quadratische Gleichung:

Diskriminante $\quad b^2-4ac>0$

$$(-10)^2-4\cdot 1\cdot(-5k)>0$$

$$100+20k>0$$

$$\underline{k>-5}$$

c) Für $k=-\frac{9}{5}$ erhält man: $f'(x)=\frac{x^2-10x-5\cdot(-1{,}8)}{(x-5)^2}=\frac{x^2-10x+9}{(x-5)^2}$

$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-10x+9=0$

$$x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}$$

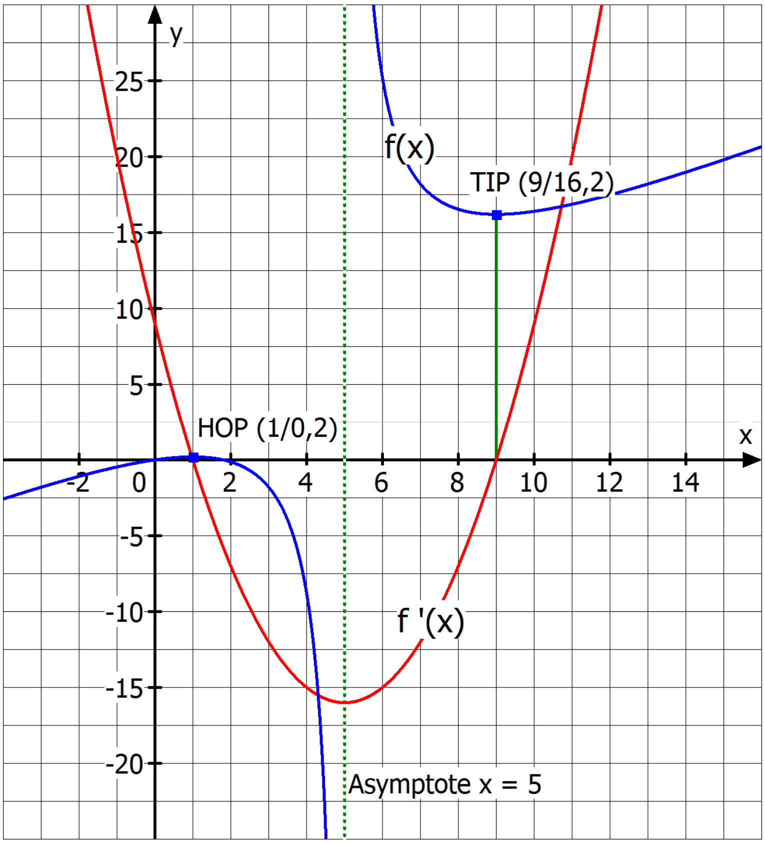
$$\underline{x_1=1;\quad x_2=9}$$

$x_1=1$ und $x_2=9$ sind jeweils einfache Nullstellen, also Vorzeichenwechsel und somit Änderung der Monotonie.

$x<1$	streng monoton steigend
$x=1$	Hochpunkt $HOP(1\mid 0{,}2)$
$1<x<5$	streng monoton fallend
$x=5$	Asymptote / Polstelle
$5<x<9$	streng monoton fallend
$x=9$	Tiefpunkt $TIP(9\mid 16{,}2)$
$x>9$	streng monoton steigend

- Lösungen -

Skizze für $k = -\frac{9}{5}$ (nicht verlangt):



4. Flugbahn der Kugel:

$$p(x) = -\frac{6}{81}(x-9)^2 + 6$$

$$p(x) = -\frac{6}{81}(x^2 - 18x + 81) + 6$$

$$p(x) = -\frac{6}{81}x^2 + \frac{108}{81}x - 6 + 6$$

$$\underline{p(x) = -\frac{2}{27}x^2 + \frac{4}{3}x}$$

Skizze:

1. Ableitung => Steigung des Graphen im Punkt $(0|0)$:

$$p'(x) = -\frac{4}{27}x + \frac{4}{3}$$

$$p'(0) = -\frac{4}{27} \cdot 0 + \frac{4}{3}$$

$$p'(0) = \frac{4}{3} \Rightarrow m_{Tangente} = \tan\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{\alpha \approx 53{,}13°}}$$

- Lösungen -

5. a) Bestimmung der Parabelgleichung p_2

Scheitelform der allg. Parabel: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$

Mit dem Scheitelpunkt $E(12|0)$ und dem Punkt $D(6|3)$ der auf p_2 liegt, ergibt sich nun für die Parabelgleichung p_2:

$$3 = a(6-12)^2 + 0$$

$$3 = 36a$$

$$\underline{a = \frac{1}{12}} \quad \Rightarrow \quad p_2(x) = \frac{1}{12}(x-12)^2 + 0$$

$$\underline{\underline{p_2(x) = \frac{1}{12}x^2 - 2x + 12}}$$

b) Bestimmung der Tangente t im Punkt $D(6|3)$ an p_2

1. Ableitung von p_2:

$$p_2'(x) = \frac{1}{6}x - 2$$

$$p_2'(6) = \frac{1}{6} \cdot 6 - 2 = -1 \quad \Rightarrow m_{Tangente} = -1$$

Gleichung der Tangente t:

$$t(x) = m(x - x_1) + y_1$$

$$t(x) = -1 \cdot (x - 6) + 3$$

$$\underline{\underline{t(x) = -x + 9}}$$

Übergangspunkt C; dort stimmt die Ableitung von p_1 mit der Steigung der Tangente überein:

$$p_1'(x) = -0{,}5x \;\Rightarrow\; -0{,}5x = -1$$

$$x_C = 2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{C(2|7)}}$$

c) Mathematische Beschreibung der Rutschbahn:

$$\text{Rutsche}(x) = \begin{cases} -0{,}25x^2 + 8 & \text{für } [0;2] \\ -x + 9 & \text{für } [2;6] \\ \frac{1}{12}x^2 - 2x + 12 & \text{für } [6;12] \end{cases}$$

- Lösungen -

6. a) Fläche der Trapeze:

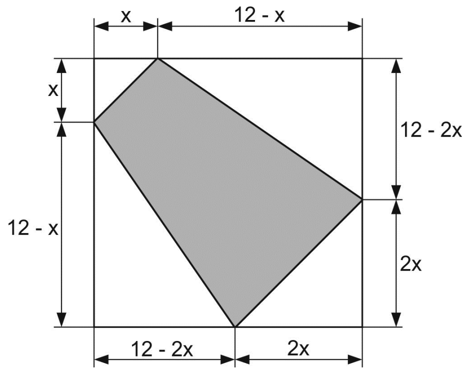
$$A(x) = A_{Quadrat} - A_{Dreiecke}$$

$$A(x) = 144 - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (12 - x) \cdot (12 - 2x)$$

$$A(x) = 144 - 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \left(144 - 24x - 12x + 2x^2\right)$$

$$A(x) = 144 - 2{,}5x^2 - 144 + 36x - 2x^2$$

$$\underline{A(x) = -4{,}5x^2 + 36x}$$



Seitenlänge des Quadrates:

$a = \sqrt{144\ \text{cm}^2} = 12\ \text{cm}$

b) Intervall für x: $\underline{0 < x < 6}$

c) Die Funktion, die den Flächeninhalt $A(x)$ der Trapeze darstellt, ist eine nach unten geöffnete Parabel; der Scheitel ist ein Maximum.

d) Ableitung der Funktion für die Trapezfläche:

$$A'(x) = -9x + 36 = 0$$

$$-9x = -36 \quad | :(-9)$$

$$\underline{x = 4}$$

