

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 1.0** Gegeben sind die Punkte $A(0/-4)$, $C(0/4)$, sowie die Pfeile $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4 \cos \alpha \\ 4 \sin \alpha + 4 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [-90^\circ; 90^\circ]$.
- 1.1** Zeichne die drei Punkte B_1 , B_2 und B_3 mit $\alpha \in \{-30^\circ; 0^\circ; 30^\circ\}$ in ein KOS.
- 1.2** Zeige: $\overline{CB} = \begin{pmatrix} 4 \cos \alpha \\ 4 \sin \alpha - 4 \end{pmatrix}$.
- 1.3** Zeige, dass für $\alpha \in [-90^\circ; 90^\circ]$ gilt: $[AB] \perp [CB]$.
Auf welcher Linie liegen also alle Punkte B ?
- 1.4** Bestimme die Koordinaten von B und den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α .
- 1.5** Für welches Winkelmaß α_0 wird die Dreiecksfläche am größten ? Gib diesen maximalen Inhalt an. Wie kann dieses Ergebnis auch durch geometrische Überlegungen gefunden werden ?
- 2.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 6 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ 6 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- 2.1** Zeichne die Pfeile für $\alpha \in \{30^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$ in ein Koordinatensystem.
- 2.2** Im Punkt P wird jeweils die Senkrechte zu $[OP]$ gezeichnet. Diese Senkrechte schneidet die positive x-Achse in T. Stelle die Koordinaten von T in Abhängigkeit von α dar.
[Ergebnis: $T(6 \tan \alpha / 0)$]
- 2.3** Für welches Winkelmaß α_4 ist $\overline{OP} = 3 \text{cm}$?
- 2.4** Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks OTP in Abhängigkeit von α .
[Ergebnis: $A(\alpha) = 18 \tan \alpha \cdot \sin^2 \alpha \text{ cm}^2$]
- 2.5** Tabellarisiere $A(\alpha)$ mit $\Delta \alpha = 10^\circ$ und zeichne den Graphen.
- 3.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 5 \cos \alpha \\ 5 \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\overline{AD} = \begin{pmatrix} 5 \cos(\alpha + 90^\circ) \\ 5 \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix}$ mit $A(4/-3)$ und $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- 3.1** Zeichne die Pfeile für $\alpha \in \{0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$ in ein Koordinatensystem.
- 3.2** Zeige, dass \overline{AB} und \overline{AD} für alle Winkelmaße α orthogonal sind.
- 3.3** Zeige, dass $\triangle ABD$ für alle Werte von α gleichschenkelig ist mit $[BD]$ als Basis. Ergänze die Dreiecke ABD zu Quadraten ABCD und bestimme die Koordinaten von C in Abhängigkeit von α .
[Ergebnis: $C(4 + 5 \cos \alpha - 5 \sin \alpha / -3 + 5 \cos \alpha + 5 \sin \alpha)$]
- 3.4** Für welchen Wert α_4 gilt $x_D = 4$?
- 3.5** Für welchen Wert α_5 liegt D auf der Geraden mit $y = -\frac{1}{3}x$?

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 4.0** In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Pfeile $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \cos \alpha \\ 6 \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\overline{AD} = \begin{pmatrix} -3 \cos \alpha \\ 3 \sin \alpha \end{pmatrix}$ mit $A(0/0)$ und $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ gegeben.
Das Dreieck ABD wird zum Parallelogramm ABCD ergänzt.
- 4.1** Zeichne die Pfeile und die Parallelogramme für $\alpha \in \{30^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$.
Auf welcher Ortslinie bewegen sich alle Punkte B bzw. D ?
- 4.2** Bestimme die kartesischen Koordinaten von C in Abhängigkeit von α .
- 4.3** Bestimme den Flächeninhalt A des Parallelogramms ABCD in Abhängigkeit von α .
- 4.4** Bestimme das Winkelmaß α_4 , für das der Flächeninhalt des Parallelogramms $AB_4C_4D_4$ maximal wird. Zeige rechnerisch, dass das Parallelogramm mit $\alpha_2 = 45^\circ$ ein Rechteck ist. Formuliere das Ergebnis als Satz.
- 5.0** Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$, $B(8/0)$ und der Pfeil $\overline{BC} = \begin{pmatrix} 2 \sin \alpha - 8 \\ \sin \alpha + 4 \end{pmatrix}$ mit $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- 5.1** Zeichne die Dreiecke ABC für $\alpha \in \{-90^\circ; -30^\circ; 0^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$ in ein Koordinatensystem.
- 5.2** Berechne die Koordinaten von C in Abhängigkeit von α .
[Ergebnis: $C(2 \sin \alpha / \sin \alpha + 4)$]
- 5.3** Berechne die Gleichung des Trägergraphen aller Punkte C. Beachte dabei die Definitionsmenge !
- 5.4** Stelle den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α dar. Bestimme das Winkelmaß, für das der Flächeninhalt des Dreiecks extrem wird und gib den Inhalt an.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 4(\sin \alpha + 4)$ FE]
- 5.5** Für welche Winkelmaße wird der Flächeninhalt höchstens 18 cm^2 ?
- 5.6** Für welche Winkelmaße wird das Dreieck ABC rechtwinklig ?
- 6.0** Gegeben ist das Dreieck ABC (bzw. ACB) mit $A(0/0)$, $B(6/2)$ und $C(3 \sin \alpha / 9 \cos^2 \alpha)$ mit $\alpha \in [90^\circ; 270^\circ]$.
- 6.1** Zeichne die Dreiecke ABC mit $\alpha \in \{90^\circ; 120^\circ; 160^\circ\}$ in ein Koordinatensystem.
- 6.2** Berechne die Koordinaten des Punktes C_4 mit $\sphericalangle BAC_4 = 90^\circ$.
- 6.3** Es gibt zwei gleichschenklige Dreiecke ABC mit [AB] als Basis.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte C_5 und C_6 .
- 6.4** Bestimme die Gleichung des Trägergraphen aller Punkte C und zeichne den Graphen ein. Beachte dabei $\alpha \in [90^\circ; 270^\circ]$.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 6.5** Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α .
[Ergebnis: $A(\alpha) = 3(9\cos^2\alpha - \sin\alpha)$ FE]
- 6.6** Bestimme das Maß α_7 , für das $A = 27\frac{1}{12}$ cm² ist. Berechne die Koordinaten von C_7 .
- 7.0** Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8\tan\alpha \\ 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
O ist der Koordinatenursprung; $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$.
- 7.1** Zeichne für $\alpha \in \{10^\circ; 30^\circ; 60^\circ\}$ die Pfeile \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 15$; $-1 \leq y \leq 10$
- 7.2** Bestimme durch Rechnung die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte A!
- 7.3** Für welche Werte für α stehen Pfeile \overrightarrow{OA} senkrecht zu dem Pfeil \overrightarrow{OB} ?
- 7.4** Die Pfeile \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} spannen Parallelogramme $OACB$ auf. Bestimme die Koordinaten vom Eckpunkt C in Abhängigkeit von α ! Ermittle durch Rechnung die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte C!
- 7.5** Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme $OACB$ in Abhängigkeit von α !
- 7.6** Für welche Werte für α wird der Flächeninhalt 33 FE groß?
- 7.7** Berechne das Maß des Winkels zwischen den Pfeilen \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} für $\alpha = 30^\circ$!
- 8.0** Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 4\cos^2\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$.
- 8.1** Zeichne für $\alpha \in \{45^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 150^\circ\}$ Pfeile \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 2 cm; $-2 \leq x \leq 4$; $-1 \leq y \leq 9$
- 8.2** Bestimme die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte B!
- 8.3** Für welchen Wert für α gibt es Pfeile \overrightarrow{AB} , die senkrecht zu \overrightarrow{AD} stehen?
- 8.4** Die Pfeile \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} spannen Parallelogramme $ABCD$ auf.
Bestimme die Ortslinie für alle Punkte C!
- 8.5** Berechne die Länge der Pfeile \overrightarrow{AB} in Abhängigkeit von α ! Berechne sodann für $\alpha = 150^\circ$ die zugehörige Pfeillänge!
- 8.6** Für welche Werte von α gibt es gleichlange Pfeile \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} ?
- 8.7** Berechne das Maß des Winkels zwischen den Pfeilen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} für $\alpha = 45^\circ$!

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 9.0** Die Pfeile $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ \cos \alpha \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 5 \cos \alpha \\ 5 \sin \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ und $O(0/0)$ sind gegeben.
- 9.1** Gib die Gleichung der Ortslinie für die Punkte P an !
- 9.2** Berechne die Länge der Pfeile \overline{OP} in Abhängigkeit von α ! Berechne die Länge der Pfeile \overline{OR} ; mache sodann eine Aussage über die Ortslinie der Punkte R !
- 9.3** Zeichne Pfeile \overline{OP} und \overline{OR} für $\alpha \in \{0^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$ und zeichne die Ortslinien für die Punkte P und R in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 7$; $-5 \leq y \leq 7$
- 9.4** Für welchen Wert für α gilt $|\overline{OP}| = |\overline{OR}|$?
- 9.5** Die Pfeile \overline{OP} und \overline{OR} spannen Parallelogramme OPQR auf.
Berechne die Koordinaten von Q in Abhängigkeit von α !
- 9.6** Unter den Parallelogrammen gibt es ein Rechteck $OP_0Q_0R_0$.
Für welchen Wert für α ist dies der Fall ?
Bestimme sodann die Koordinaten der Punkte P_0 , Q_0 und R_0 , und zeichne das Rechteck $OP_0Q_0R_0$ in die Zeichnung zu 9.3 ein !
- 9.7** Unter den Parallelogrammen OPQR gibt es eine Raute $OP^*Q^*R^*$.
Bestimme die Koordinaten von P^* , Q^* und R^* !
- 10.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overline{OC} = \begin{pmatrix} 4 \cos \alpha + 4 \\ 4 \sin \alpha + 5 \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$.
- 10.1** Zeichne Pfeile \overline{OC} für $\alpha \in \{0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 330^\circ\}$ und \overline{OA} in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 10$; $-5 \leq y \leq 10$
- 10.2** Die Pfeile \overline{OA} und \overline{OC} spannen Parallelogramme OABC auf. Unter diesen Parallelogrammen gibt es zwei Rechtecke OAB_0C_0 und OAB^*C^* .
Für welche Werte für α existieren diese Rechtecke ?
Gib die Koordinaten von C_0 und C^* an !
- 10.3** Berechne die Koordinaten der Punkte B in Abhängigkeit von α und berechne die Koordinaten von B_0 und B^* !
- 10.4** Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme OABC in Abhängigkeit von α !
- 10.5** Berechne die Länge der Pfeile \overline{OC} in Abhängigkeit von α !
Für welche Werte für α gilt $|\overline{OC}| = |\overline{OA}|$?
- 10.6** Der Punkt $P(4/5)$ bildet mit den Punkten C Pfeile \overline{PC} . Berechne die Koordinaten der Pfeile \overline{PC} , bestimme die Länge dieser Pfeile und nenne die Ortslinie für alle Punkte C !

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 10.7** Berechne das Maß φ des Winkels zwischen den Pfeilen \overline{OA} und \overline{OC} für $\alpha = 150^\circ$!
- 11.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{OA} = \begin{pmatrix} 6 \cos \alpha \\ 6 \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\overline{OC} = \begin{pmatrix} -3 \cos \alpha \\ 3 \sin \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ[$ und $O(0/0)$.
- 11.1** Zeichne Pfeile \overline{OA} und \overline{OC} für $\alpha \in \{30^\circ; 60^\circ; 75^\circ\}$ in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leq x \leq 7$; $-1 \leq y \leq 10$
- 11.2** Die Pfeile \overline{OA} und \overline{OC} spannen Parallelogramme OABC auf. Zeichne für die Werte von α aus 11.1 diese Parallelogramme in das KOS zu 11.1 ein, und berechne die Koordinaten des Eckpunktes B in Abhängigkeit von α !
- 11.3** Für welchen Wert für α stehen die Pfeile \overline{OA} und \overline{OC} senkrecht zueinander ?
- 11.4** Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme OABC in Abhängigkeit von α !
Bestimme α für das flächengrößte Parallelogramm !
[Ergebnis: $A = 18 \sin 2\alpha$ FE]
- 11.5** Für welchen Wert von α wird der Flächeninhalt der Parallelogramme gleich 12 FE ?
- 11.6** Gibt es im angegebenen Intervall für α gleichlange Pfeile \overline{OA} und \overline{OC} ?
Begründe die Antwort durch Rechnung !
- 12.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha - 4 \end{pmatrix}$ und $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \cos \alpha + 5 \\ 3 \sin \alpha + 3 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ und $O(0/0)$.
- 12.1** Zeichne die Pfeile \overline{AB} und \overline{AC} für $\alpha \in \{0^\circ; 30^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 9$; $-7 \leq y \leq 7$
- 12.2** Berechne das Maß β des Winkels zwischen den Pfeilen \overline{AB} und \overline{AC} für $\alpha = 90^\circ$!
- 12.3** Entscheide durch Rechnung, ob es Werte für α gibt, so dass $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ gilt !
- 12.4** Berechne die Beträge der Pfeile \overline{AB} und \overline{AC} in Abhängigkeit von α !
Berechne die Beträge für $\alpha \in \{0^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$!
- 12.5** Die Punkte $P(0/-4)$ und $Q(5/3)$ bilden mit den Punkten B und C Pfeile \overline{PB} und \overline{QC} .
Gib die Koordinaten dieser Pfeile in Abhängigkeit von α an !
Berechne die zugehörigen Pfeillängen !
Auf welchen Ortslinien bewegen sich die Punkte B und C ?
Zeichne die Ortslinien in das Koordinatensystem zu 12.1 ein !
- 12.6** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AB_0C_0 für $\alpha = 65^\circ$!

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

13.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{6 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ \frac{6 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \end{pmatrix} \text{ gegeben, die mit der positiven x-Achse Winkel mit dem Winkelmaß } \varphi$$

und $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ einschließen.

13.1 Bestimme die Länge der Pfeile \overrightarrow{OP} in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } \overrightarrow{OP} = \frac{6}{1 + \sin \varphi} \text{ LE}]$$

13.2 Ermittle mit Hilfe des Ergebnisses aus 13.1 die Winkelmaße φ so, dass \overrightarrow{OP} möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

13.3 Die Punkte $P(x/y)$ mit den Koordinaten $x = \frac{6 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$ und $y = \frac{6 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$ liegen auf dem Graphen p .
Tabellarisiere x und y in Abhängigkeit von $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ in Schritten von $\Delta\varphi = 30^\circ$.
Zeichne sodann den Graphen p für das angegebene Intervall in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: $1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ LE}$.

13.4 Der Fußpunkt des Lotes von einem Punkt $P \in p$ auf die x -Achse ist Q . Rotiert das Dreieck OQP um die x -Achse, so entsteht als Rotationskörper ein gerader Kreiskegel. Trage das Dreieck OQP für $\varphi = 30^\circ$ in das Koordinatensystem zu 13.3 ein.

13.5 Stelle die Mantelfläche M des Rotationskörpers in Abhängigkeit von φ dar.

$$[\text{Ergebnis: } M(\varphi) = \pi \cdot \frac{36 \sin \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \text{ FE}]$$

13.6 Für welche Belegungen von φ nimmt die Mantelfläche M den Wert 8π FE an?

14.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 - \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,4 \end{pmatrix}$ spannen Parallelogramme $OPRQ$ auf.

14.1 Stelle eine Wertetabelle für $\alpha \in \{10^\circ; 20^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$ auf, und zeichne die Parallelogramme $OPRQ$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 5 cm; $-1 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 2,5$

14.2 Gib den Flächeninhalt $A(\alpha)$ der Parallelogramme $OPRQ$ in Abhängigkeit von α an.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 0,4(1 + 3 \sin \alpha)$ FE]

14.3 Für welches Winkelmaß α erhält man ein Parallelogramm mit 1,4 FE Inhalt?

14.4 Ermittle das Winkelmaß α^* , für das sich das flächengrößte Parallelogramm $OPRQ$ ergibt. Gib A_{\max} an.

14.5 Zeige, dass die Pfeilspitzen P eine Gerade beschreiben, indem du ihre Gleichung ermittelst.
Anleitung: Für $P(x/y)$ gilt $x = 1 - \sin \alpha \wedge y = 2 \sin \alpha$. Eliminiere nun $\sin \alpha$.

14.6 Begründe, dass auch die Punkte R auf einer Geraden liegen.
Welche Gleichung hat diese Gerade?

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 15.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha \end{pmatrix}$.
- 15.1** Erstelle eine Wertetabelle für $\alpha \in [15^\circ; 75^\circ]$ mit $\Delta\alpha = 15^\circ$, und zeichne die Pfeile im Koordinatensystem. Längeneinheit ist 1 cm. Platzbedarf: $-5 \leq x \leq +5$; $-4 \leq y \leq +4$.
- 15.2** Begründe, dass man anhand der Wertetabelle in 15.1 auch die Koordinaten der Pfeile für $\alpha \in]90^\circ; 360^\circ[$ angeben kann. Zeichne sie in das Koordinatensystem zu 15.1 ein.
- 15.3** Zeige, dass die Pfeilspitzen P auf einer Hyperbel liegen, und ermittle ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten.
- 16.** Führe die Aufgabe 15 mit den Pfeilen $\overline{OP} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi \end{pmatrix}$ durch, und zeige, dass die Pfeilspitzen P auf einer Parabel liegen.
- 17.0** Gegeben sind die Pfeile $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 + \sin \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$ und $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \\ 3 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$.
- 17.1** Berechne die Koordinaten der Pfeile \overline{OP} und \overline{OQ} für $\varphi \in \{0^\circ; 20^\circ; 40^\circ; 60^\circ; 270^\circ; 300^\circ; 320^\circ; 340^\circ\}$, und trage die Punkte in ein Koordinatensystem mit 2 cm als Längeneinheit ein. Platzbedarf: $0 \leq x \leq 4$; $0 \leq y \leq 4$
- 17.2** Begründe, dass die Pfeile mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 + \sin \varphi \\ \frac{1}{3}(2 + \sin \varphi)^2 \end{pmatrix}$, die jeweils dieselben x-Koordinaten wie die Pfeile \overline{OP} haben, zu den Pfeilen \overline{OQ} gehören.
- 17.3** Gemäß Aufgabe 17.2 gilt $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} 2 + \sin \varphi \\ \frac{1}{3}(2 + \sin \varphi)^2 \end{pmatrix}$. Die Differenz Δy der y-Koordinaten der Pfeile \overline{OQ} und \overline{OP} gibt somit die Maßzahl der Entfernung \overline{QP} an. Stelle diese Differenz Δy in Abhängigkeit von φ dar, und zeige durch Umformung, dass sich die beiden Graphen berühren. Berechne die kartesischen Koordinaten des Berührungspunktes sowie das zugehörige Winkelmaß φ .
- 17.4** Stelle die Pfeile \overline{OP} und \overline{OQ} durch kartesische Koordinaten dar, und zeige damit, dass beide Graphen Parabeln sind.
Lösungshinweis: Beachte die Anleitung bei Aufgabe 14.5.
[Ergebnis: $p_1 : y = -(x - 2)^2 + 1$; $p_2 : y = \frac{1}{3}x^2$]
- 17.5** Zeige erneut mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 17.4, dass sich die beiden Parabeln p_1 und p_2 berühren, und berechne die kartesischen Koordinaten des Berührungspunktes.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 18.0** In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} \frac{6 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ \frac{6 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \end{pmatrix} \text{ gegeben mit } \varphi \in [0^\circ; 180^\circ]. \text{ siehe auch Aufgabe 13 !}$$

Dabei ist φ das Maß des Winkels zwischen der positiven x-Achse und den Pfeilen \overline{OP} .

- 18.1** Bestimme die Länge der Pfeile \overline{OP} in Abhängigkeit von φ , und ermittle die Winkelmaße für φ , so dass \overline{OP} möglichst groß bzw. möglichst klein wird.
- 18.2** Die Endpunkte P der Pfeile \overline{OP} liegen auf dem Graphen p. Gib für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ mit $\Delta\varphi = 30^\circ$ die Koordinaten der Punkte P an, und zeichne den Graphen p für das angegebene Intervall in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).
- 18.3** Bestätige durch Rechnung, dass die Spitzen P der Pfeile \overline{OP} auf dem Graphen zu $y = -\frac{1}{12}x^2 + 3$ liegen.
- 18.4** Fällt man von $P \in p$ das Lot auf die x-Achse, so erhält man als Lotfußpunkt Q. Rotieren sodann die Dreiecke mit den Eckpunkten O, Q und P um die x-Achse, so entstehen Kegel. Stelle die Mantelfläche A_M der Kegel in Abhängigkeit von φ dar.

$$[\text{Ergebnis: } A_M = \frac{36 \cdot \pi \cdot \sin \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \text{ FE}]$$

- 18.5** Für welche Belegungen von φ nimmt die Mantelfläche A_M den Wert 8π FE an ?

- 19.0** In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile

$$\overline{OB} = \begin{pmatrix} 8 \cos \varphi \\ 8 \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und } \overline{OD} = \begin{pmatrix} -4 \cos \varphi \\ 4 \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \varphi \in [0^\circ; 90^\circ] \text{ gegeben.}$$

Die Parallelen zu OB und OD durch D bzw. B schneiden sich im Punkt C.

- 19.1** Ermittle für $\varphi = 30^\circ$ die Koordinaten der Punkte B und D, und zeichne das Parallelogramm OBCD in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm. Platzbedarf: $-4 \leq x \leq 7$; $-1 \leq y \leq 6$
- 19.2** Bestimme die Koordinaten des Eckpunktes C der Parallelogramme in Abhängigkeit von φ .
- 19.3** Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme OBCD in Abhängigkeit von φ .
[Ergebnis: $A(\varphi) = 32 \sin 2\varphi$ FE]
- 19.4** Tabellarisiere $A(\varphi)$ für $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$ mit $\Delta\varphi = 15^\circ$, und zeichne den Graphen von A in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: φ -Achse: 1 cm entspricht 10° ; A-Achse: 1 cm entspricht 10 FE.
- 19.5** Bestimme das Maß φ^* , für das die Fläche des zugehörigen Parallelogramms den größten Wert annimmt. Gib A_{\max} an.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 20.** Der Punkt $B(8/-1)$ ist ein Eckpunkt einer Raute ABCD, deren Diagonalschnittpunkt $M(4/2)$ ist und bei der $\sphericalangle DCB = 60^\circ$ gilt.
Zeichne die Raute ABCD in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die fehlenden Eckpunktkoordinaten.
- 21.** In einem Drachenviereck ABCD mit $B(3/8)$, $C(x/7)$ und $D(0/2)$ ist AC die Symmetrieachse, und es gilt $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = 90^\circ$. Zeichne das Drachenviereck ABCD in ein Koordinatensystem, und berechne die fehlende Koordinate des Punktes C sowie die Koordinaten des Punktes A.
- 22.** Zeichne die Raute ABCD mit $A(-0,5/y)$, $B(6,5/1,5)$ und $D(-2,5/4,5)$ in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit.
Berechne die fehlende Koordinate des Punktes A, die Koordinaten des Punktes C, die Innenwinkel und den Flächeninhalt der Raute.
- 23.** Der Eckpunkte D einer Raute ABCD mit $A(0/3,5)$ und $C(6/1,5)$ liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 6$. Zeichne die Raute ABCD, und berechne die Koordinaten der Eckpunkte D und B.
- 24.** Die Eckpunkte D von Rauten ABCD mit $A(1/-2)$ und $C(7/4)$ liegen auf der Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 - 2x + 3$.
Zeichne die möglichen Rauten ABCD in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die Koordinaten der Punkte D und B.
- 25.** Die Punkte $A(-1/y_A)$ und $B(2/y_B)$ liegen auf der Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 2$. Zeichne Punkte C auf der Parabel p, so dass die Punkte A, B und C Dreiecke bilden, die bei A oder bei B rechtwinklig sind. Berechne die Koordinaten der Punkte C.
- 26.** Die Punkte $A(7/-0,5)$ und $B(9/3,5)$ bilden zusammen mit Punkten C der Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ Dreiecke ABC, die bei A oder bei B rechtwinklig sind.
Zeichne die möglichen Dreiecke ABC, und berechne die Koordinaten der Punkte C.
- 27.0** Die Punkte $A(0/0)$, $B(4/-3)$ und $C_n(2k/-\frac{k}{2} + 8)$ mit $k \in \mathbb{R}$ bilden Dreiecke ABC_n .
- 27.1** Zeichne das Dreieck ABC_1 für $k = 0$ in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABC_1 .
- 27.2** Unter den Dreiecken ABC_n gibt es zwei rechtwinklige Dreiecke ABC_2 und ABC_3 . Zeichne diese beiden rechtwinkligen Dreiecke ein, und berechne die Koordinaten der Punkte C_2 und C_3 sowie die Innenwinkelmaße der Dreiecke.
- 27.3** Zeichne die Dreiecke ABC_4 mit $\sphericalangle BAC_4 = 60^\circ$ und ABC_5 mit $\sphericalangle BAC_5 = 150^\circ$ ein, und berechne die Koordinaten der Punkte C_4 und C_5 .
- 27.4** Zeige rechnerisch, dass die Eckpunkte C_n der Dreiecke ABC_n auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{4}x + 8$ liegen.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

- 27.5** Zeichne das Dreieck ABC_0 ein, das gleichschenkelig mit $[AB]$ als Basis ist, und berechne die Koordinaten des Punktes C_0 , den zugehörigen Wert für k und die Maße der Dreiecksinnenwinkel.
- 27.6** Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC_6 mit einem Flächeninhalt von 18 FE ?
- 27.7** Bestimme mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektoren \overline{AB} und \overline{AC}_n die Definitionsmenge $D(k)$ für k , so dass Dreiecke ABC_n entstehen.