

# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 1.0** Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge  $a$  cm ist Grundfläche eines Würfels mit der Deckfläche EFGH, wobei E über A, F über B usw. liegen.  
Zur Grundfläche ABCD parallele Ebenen schneiden die Würfelkanten [AE] in A', [BF] in B', [CG] in C' und [DH] in D'. Mit dem Diagonalschnittpunkt S der Grundfläche ABCD bilden diese Punkte Pyramiden A'B'C'D'S.  
Der Winkel  $\sphericalangle AA'S$  hat das Maß  $\varphi$ .
- 1.1** Zeichne den Würfel im Schrägbild mit einer Pyramide!  
Für die Zeichnung:  $a = 6$ ;  $\omega = 45^\circ$ ;  $q = 0,5$ ; Rissachse CD.  
Bezeichne den Winkel mit dem Maß  $\varphi$ !
- 1.2** Berechne die Länge der Pyramidenkante [A'S] in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !  
Gib die Grenzen für  $\varphi$  an!
- 1.3** Berechne die Pyramidenhöhe  $\overline{SS_0} = h$  cm in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !
- 1.4** Die Pyramidenhöhe ist  $h$  cm. Für welche Werte für  $\varphi$  gilt:  $\frac{a}{2} \leq h \leq \frac{2}{3}a$  ?
- 1.5** Berechne das Volumen der Pyramide A'B'C'D'S in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !
- 1.6** Für welchen Wert für  $\varphi$  nimmt das Volumen den Wert  $\frac{a^3}{6}\sqrt{2}$  cm<sup>3</sup> an ?
- 2.0** Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge  $a$  cm ist Grundfläche eines Würfels mit der Deckfläche EFGH, wobei E über A, F über B usw. liegen.  
Eine Ebene ACQP mit  $P \in [EF]$  und  $Q \in [FG]$  schneidet aus dem Würfel gleichschenklige Trapeze ACQP aus. Der Neigungswinkel zwischen Trapez und Grundfläche ABCD hat das Maß  $\alpha$ .
- 2.1** Zeichne das Schrägbild des Würfels mit einem Trapez; bezeichne den Winkel mit dem Maß  $\alpha$ !  
Für die Zeichnung:  $a = 5$ ;  $\omega = 45^\circ$ ;  $q = 0,5$ ; Rissachse CD.
- 2.2** Bestimme die Grenzen von  $\alpha$  und berechne die Trapezhöhe  $h = x$  cm in Abhängigkeit von  $a$  und  $\alpha$ !
- 2.3** Berechne die Seitenlänge  $\overline{PQ}$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $\alpha$ !
- 2.4** Für welchen Wert für  $\alpha$  nimmt die Streckenlänge  $\overline{PQ}$  den Wert  $\frac{a}{2}\sqrt{2}$  cm an ?
- 2.5** Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze ACQP in Abhängigkeit von  $a$  und  $\alpha$ !
- 2.6** Tabellarisiere den Term für den Flächeninhalt im erlaubten Intervall in Schritten von  $\Delta\alpha = 5^\circ$  für  $a = 6$  und zeichne den Graph!

# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 3.0** Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge  $a$  cm ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe  $h = a\sqrt{3}$  cm. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke [AD].  
Eine Ebene APQD mit  $P \in [BS]$  und  $Q \in [CS]$  schneidet aus der Pyramide gleichschenklige Trapeze APQD aus. Der Neigungswinkel zwischen Trapez und Grundfläche hat das Maß  $\varphi$ .
- 3.1** Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS und ein Trapez APQD.  
Bezeichne den Winkel mit dem Maß  $\varphi$ !  
Für die Zeichnung:  $a = 6$ ;  $\omega = 45^\circ$ ;  $q = 0,5$ ; Rissachse CD.
- 3.2** Bestimme die Grenzen für  $\varphi$ . Berechne die Trapezhöhe  $h^* = x$  cm in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !
- 3.3** Für welche Werte für  $\varphi$  gilt:  $\frac{3}{4}a \leq x \leq a\sqrt{2}$  ?
- 3.4** Der Punkt R ist Mittelpunkt der Strecke [PQ]. Berechne die Streckenlänge  $\overline{SR} = y$  cm in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !
- 3.5** Für welche Werte für  $\varphi$  wird die Streckenlänge  $\overline{SR} \leq a$  cm ?
- 3.6** Berechne die Streckenlänge  $\overline{PQ}$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !
- 3.7** Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze APQD in Abhängigkeit von  $a$  und  $\varphi$ !
- 3.8** Tabellarisiere den Term für A im erlaubten Intervall in Schritten von  $\Delta\varphi = 10^\circ$  für  $a = 6$ !  
Zeichne den zugehörigen Graph!
- 4.0** Das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck ABC mit  $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$  cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCS. Die Spitze S liegt senkrecht über C, und es gilt  $\overline{CS} = 8$  cm.  
Von A aus werden auf [AB] Strecken [AP], von B aus auf [BS] Strecken [BQ] und von S aus auf [SC] Strecken [SR] mit  $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{SR} = x$  cm abgetragen ( $x \in \mathbb{R}^+$ ).  
Die Punkte P, Q und R sind Eckpunkte von Dreiecken PQR.
- 4.1** Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS mit dem Dreieck PQR für  $x = 3$  mit  $\omega = 60^\circ$  und  $q = 1:2$ . Die Kante [BC] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.
- 4.2** Für welchen Wert von  $x$  gilt  $\overline{PQ} = 6$  cm ?  
Berechne für diesen Fall  $\overline{QR}$  und  $\overline{PR}$  und die Innenwinkelmaße des Dreiecks PQR.

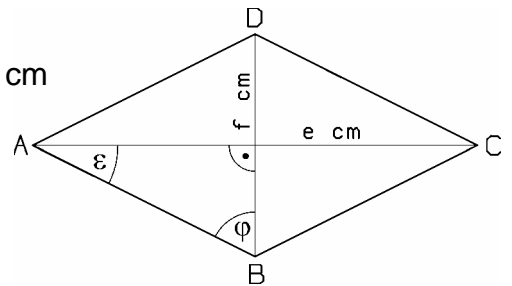
# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 5.0** Das gleichschenklige Dreieck  $ABC$  mit  $\overline{CA} = \overline{CB}$  ist Grundfläche einer Pyramide  $ABCS$ , deren Höhe  $8\text{ cm}$  lang ist. Die Spitze  $S$  liegt senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche  $ABC$ .  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $[AB]$  mit  $\overline{AB} = 6\text{ cm}$ . Die Strecke  $[CM]$  ist  $5\text{ cm}$  lang. Dreht man eine Ebene um  $AB$ , so erhält man als Schnittfiguren mit der Pyramide  $ABCS$  Dreiecke  $ABZ$  mit  $Z \in [CS]$ , die die Pyramide  $ABCS$  in die Teilpyramiden  $ABCZ$  und  $ABSZ$  zerlegen. Der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einem Schnittdreieck hat das Maß  $\varphi$ .
- 5.1** Zeichne das Schrägbild der Pyramide  $ABCS$  mit einem Schnittdreieck  $ABZ$ , wobei die Symmetrieachse  $CM$  des Dreiecks  $ABC$  die Rissachse ist.  
Für die Zeichnung:  $q = 0,5$ ;  $\omega = 45^\circ$
- 5.2** Für welche Werte von  $\varphi$  erhält man Schnittdreiecke ?
- 5.3** Stelle  $\overline{ZM}$  und den Flächeninhalt  $A$  der Schnittdreiecke  $ABZ$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  dar.  
Für welchen Wert von  $\varphi$  erhält man das flächenkleinste Schnittdreieck  $ABZ$  ?  
(Teilergebnis:  $A = \frac{13,85}{\sin(67,4^\circ + \varphi)} \text{ cm}^2$ )
- 5.4** Für welches Winkelmaß  $\varphi_0$  wird die gegebene Pyramide  $ABCS$  von der Ebene durch  $AB$  in zwei volumengleiche Pyramiden  $ABCZ$  und  $ABSZ$  zerlegt ?  
Berechne das Winkelmaß  $\varphi_0$ .

- 6.0** In Rauten  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $a$  sind die Diagonalen  $[AC]$  mit  $\overline{AC} = e\text{ cm}$  und  $[BD]$  mit  $\overline{BD} = f\text{ cm}$  zusammen  $18\text{ cm}$  lang.  
Für das Maß  $\varepsilon$  von  $\sphericalangle BAC$  gilt  $0^\circ < \varepsilon < 90^\circ$ .



- 6.1** Zeige durch Rechnung, dass unter den Rauten  $ABCD$  das Quadrat  $A_0B_0C_0D_0$  die kürzeste Seite  $a_0$  und damit den kleinsten Umfang besitzt.
- 6.2** Berechne  $\varepsilon$ , so dass die Seite  $a$  der zugehörigen Raute  $ABCD$   $8\text{ cm}$  lang ist.
- 6.3** Begründe, dass  $4,5\sqrt{2}\text{ cm} \leq a < 9\text{ cm}$  gilt.
- 6.4** Zeige, dass die Raute  $A_0B_0C_0D_0$  mit dem kleinsten Umfang den größten Flächeninhalt besitzt.  
(Teilergebnis:  $A_{ABCD} = \frac{81 \cdot \sin 2\varepsilon}{1 + \sin 2\varepsilon} \text{ cm}^2$ )
- 6.5** Berechne  $\varepsilon$ , so dass  $A_{ABCD} = 30\text{ cm}^2$  erfüllt ist.
- 6.6** Die Rauten  $ABCD$  rotieren um die Achse  $BD$  und erzeugen dabei Doppelkegel als Rotationskörper. Weise für das Volumen  $V_1$  der Doppelkegel nach:

$$V_1(\varepsilon) = 486\pi \cdot \frac{\tan \varepsilon}{(\tan \varepsilon + 1)^3} \text{ cm}^3.$$

# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 6.7** Stelle zu  $V_1$  eine Wertetabelle auf mit  $\Delta\varepsilon = 10^\circ$  und zeichne den Graph für das Volumen gemäß 6.6.  
( $\varepsilon$ -Achse: 1 cm für  $10^\circ$ ; V-Achse: 1cm für  $20 \text{ cm}^3$ ).
- 6.8** Dem Diagramm zu 6.7 ist zu entnehmen, dass etwa mit  $27^\circ$  für  $\varepsilon$  der Doppelkegel mit dem größten Volumen entsteht. Bestätige  $26^\circ < \varepsilon < 28^\circ$  mit dem Taschenrechner, und bestimme dann durch Intervallschachtelung  $\varepsilon$  auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.
- 6.9** Bei Rotation der Rauten ABCD um die Achse AC entstehen ebenfalls Doppelkegel. Zeige, dass für das Volumen  $V_2$  dieser Doppelkegel gilt:  $V_2 = V_1 \cdot \tan \varepsilon$ .
- 6.10** Zeige durch Rechnung, dass  $V_2(90^\circ - \varepsilon) = V_1(\varepsilon)$  gilt. Mit welchem Wert für  $\varepsilon$  nimmt daher  $V_2$  einen maximalen Wert an? Wann gilt  $V_2 = V_1$ ?
- 7.0** Eine Menge von geraden Kreiskegeln ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Kegel gleichlange Mantellinien  $s$  haben, die aber von Kegel zu Kegel verschiedene Neigungswinkel  $\alpha$  mit der Grundfläche einschließen. Jeder Kegel enthält eine Inkugel.
- 7.1** Zeichne vom Kegel mit  $s = 6 \text{ cm}$  und  $\alpha = 50^\circ$  eine Schnittfigur, die die Kegelhöhe enthält!
- 7.2** Stelle das Volumen  $V(s; \alpha)$  der Kegel, den Radius  $r_K(s; \alpha)$  der Inkugeln und die Mantelfläche  $A_M(s; \alpha)$  der Kegel in Abhängigkeit von  $s$  und  $\alpha$  dar!
- 7.3** Begründe algebraisch, dass es im Intervall  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  keine Kegel mit extremer Mantelfläche gibt!
- 7.4** Tabellarisiere für  $s = 6 \text{ cm}$  jeweils  $V(6 \text{ cm}; \alpha)$  und  $r_K(6 \text{ cm}; \alpha)$  im Intervall  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  in Schritten  $\Delta\alpha = 10^\circ$ .
- 8.0** Ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC rotiert um [AB] als Achse: Es entsteht ein Doppelkegel.  
Der Winkel  $\sphericalangle BAC$  hat das Maß  $\alpha$ , der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist  $r$  und ist zugleich Radius der Kugel, die dem Doppelkegel umschrieben ist.
- 8.1** Fertige eine Zeichnung des Axialschnitts mit  $r = 5 \text{ cm}$  und  $\alpha = 30^\circ$  an.
- 8.2** Das Volumen  $V$  des Rotationskörpers, der entsteht, wenn aus der Kugel der Doppelkegel herausgenommen wird, ist abhängig von  $r$  und  $\alpha$ .  
Bestimme  $V(r; \alpha)$ .  

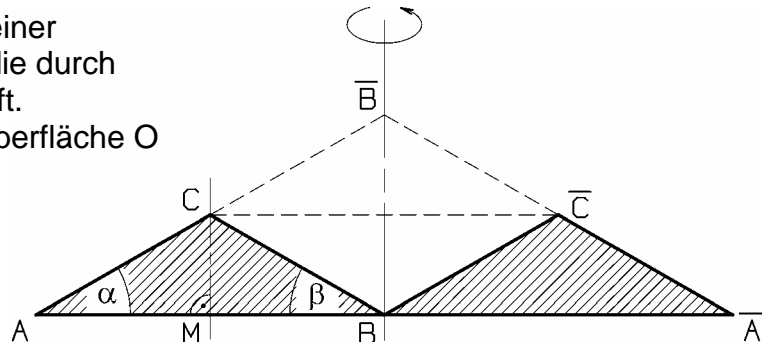
$$\left( \text{Ergebnis: } V(r; \alpha) = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot (2 - \sin^2 2\alpha) \right)$$
- 8.3** Bestimme algebraisch das Winkelmaß  $\alpha^*$ , für das  $V(r; \alpha)$  aus Aufgabe 8.2 möglichst klein ist.
- 8.4** Für welche Werte für  $\alpha$  wird für  $r = 5 \text{ cm}$  das Volumen gleich  $100 \cdot \pi \text{ cm}^3$ ?

# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

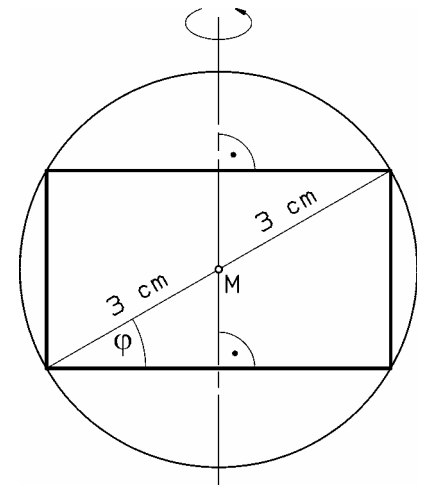
- 9.1** Das gleichschenklige Dreieck ABC mit  $\overline{AC} = \overline{BC} = 4\text{cm}$  und  $\alpha = \beta = 30^\circ$  rotiert um eine zu seiner Symmetrieachse parallelen Achse, die durch den Eckpunkt B des Dreiecks verläuft. Berechne das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $O$  des Rotationskörpers.  
(Teilergebnis:  $O = 324,9\text{ cm}^2$ )



- 9.2** Stelle das Volumen  $V(\alpha)$  und die Oberfläche  $O(\alpha)$  der Rotationskörper in Abhängigkeit vom variablen Winkelmaß  $\alpha$  dar.  
(Teilergebnis:  $O(\alpha) = 64\pi(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)\text{ cm}^2$ )

- 9.3** Für welches Winkelmaß  $\alpha$  beträgt die Oberfläche des Rotationskörpers  $80\pi\text{ cm}^2$  ?
- 9.4** Berechne das größte mögliche Volumen der Rotationskörper. Welche Oberfläche besitzt der Rotationskörper mit dem größten Volumen ?

- 10.1** Einem Kreis mit dem Radius  $r = 3\text{ cm}$  werden Rechtecke einbeschrieben. Stelle den Umfang  $u(\varphi)$  in Abhängigkeit vom Maß  $\varphi$  des Winkels dar, den die Rechteckdiagonale mit einer Rechtecksseite einschließt, und prüfe durch Rechnung, ob man dem Kreis ein Rechteck mit einem Umfang von  $14\text{ cm}$  einbeschreiben kann.



- 10.2** Wenn der Umfang am größten ist, ist auch das Quadrat des Umfangs  
 $u^2(\varphi) = 144(\sin^2 \varphi + 2\sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi)\text{ cm}^2$   
am größten. Zeige damit, dass  
 $u(\varphi) = 12\sqrt{1 + \sin 2\varphi}\text{ cm}$  gilt, und gib den größten möglichen Umfang  $u_{\max}$  an.

- 10.3** Lässt man nun den Kreis mit den einbeschriebenen Rechtecken um die Achse a rotieren, so erhält man Zylinder, die einer Kugel einbeschrieben sind. Welcher Zylinder besitzt die größte Mantelfläche ? Berechne  $\varphi$  für diesen Fall.
- 10.4** Stelle das Volumen  $V(\varphi)$  der Zylinder in Abhängigkeit von  $\varphi$  dar, und ermittle das größte mögliche Zylindervolumen.
- 10.5** Zeige, dass man als Oberfläche der Zylinder  $O(\varphi) = 18\pi(\cos^2 \varphi + \sin 2\varphi)\text{ cm}^2$  erhält. Zeichne den Graphen der Funktion mit  $y = \cos^2 \varphi + \sin 2\varphi$  für  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ , und ermittle dann  $\varphi$  für den Zylinder mit der größten Oberfläche auf ein Stelle nach dem Komma gerundet mit Hilfe einer Intervallschachtelung. Berechne sodann  $O_{\max}$ .  
(Teilergebnis:  $\varphi = 31,7^\circ$ )

# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

**11.0** Die gegebene Figur ist aus einem gleichschenkligen Dreieck und einem Halbkreis zusammengesetzt. Die 6 cm langen Schenkel schließen den Winkel mit dem Maß  $\gamma$  ein.

**11.1** Für welches Maß  $\gamma$  ist der Halbkreisbogen 12 cm lang ?

**11.2** Berechne  $\gamma$  so, dass das gleichschenklige Dreieck und der Halbkreis denselben Flächeninhalt besitzen.

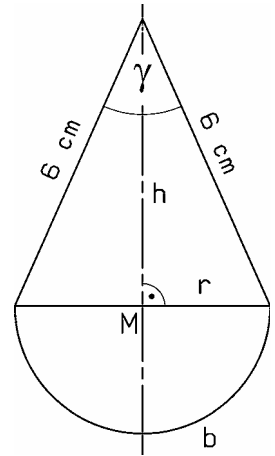
**11.3** Zeige, dass man  $A(\gamma) = 9(2 \sin \gamma - \pi \cos \gamma + \pi) \text{ cm}^2$  als Flächeninhalt der zusammengesetzten Figur erhält. Für welchen Wert von  $\gamma$  beträgt der Flächeninhalt  $36\pi \text{ cm}^2$  ?

**11.4** Lässt man die Gesamtfigur um ihre Symmetrieachse rotieren, so erhält man einen Rotationskörper, der aus einem Kegel und

einer Halbkugel zusammengesetzt ist. Zeige, dass man  $O(\gamma) = 36\pi \left( \sin \frac{\gamma}{2} + 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) \text{ cm}^2$  als Oberfläche erhält. Berechne sodann  $\gamma$ , so dass die Oberfläche  $45\pi \text{ cm}^2$  beträgt.

**11.5** Stelle das Volumen  $V(\gamma)$  der Rotationskörper in Abhängigkeit von  $\gamma$  dar, und tabellarisiere  $V(\gamma)$  für  $100^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$  in Schritten  $\Delta\gamma = 10^\circ$ .

Zeichne den Graphen für  $V(\gamma)$  in ein Koordinatensystem und entnimm diesem  $\gamma$  für den Rotationskörper mit dem größten Volumen.



**12.0** Einer Kugel mit dem Radius  $r = 5 \text{ cm}$  werden gerade Kreiskegel einbeschrieben, deren gemeinsame Spitze  $S$  ein Punkt der Kugeloberfläche ist. Zwei gegenüberliegende Mantellinien eines Kegels schließen den Öffnungswinkel mit dem Maß  $\varphi$  ein. Das nebenstehende Bild zeigt einen Axialschnitt.

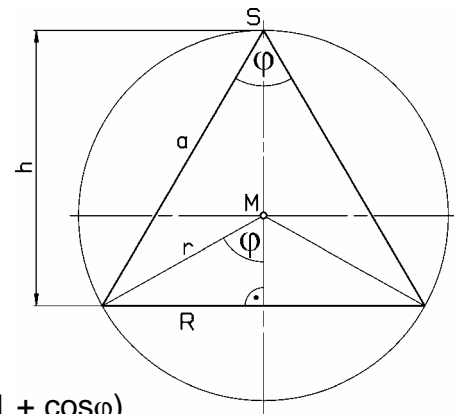
**12.1** Zeige, dass man  $V(\varphi) = \frac{125\pi}{3} \cdot \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi) \text{ cm}^3$  als Volumen der Kegel in Abhängigkeit von  $\varphi$  erhält.

**12.2** Tabellarisiere die Funktion mit der Gleichung  $y = \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)$  für  $0^\circ \leq \varphi \leq 100^\circ$  in Schritten  $\Delta\varphi = 10^\circ$ , und zeichne den Graphen.

Ermittle sodann  $\varphi$  für den größten Funktionswert durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet, und berechne damit  $V_{\max}$ .

(Teilergebnis:  $V_{\max} = 155,1 \text{ cm}^3$ )

**12.3** Zeige, dass man  $A(\varphi) = 25 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} \text{ cm}^2$  als Mantelfläche der Kegel erhält. Begründe mit Hilfe des Ergebnisses von 12.1, dass der Kegel mit dem größten Volumen auch die größte Mantelfläche besitzt.



# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 12.4** Für welches Winkelmaß  $\varphi$  erhält man einen Kegel, dessen Mantelfläche doppelt so groß ist wie seine Grundfläche ?

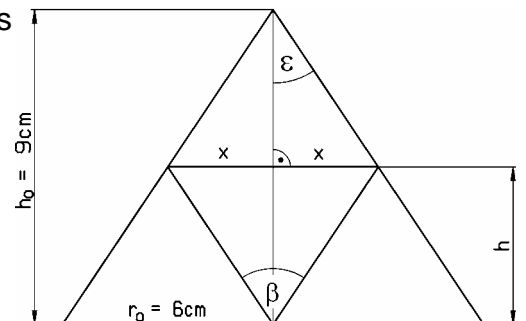
$$2 \cdot \sin^2 \varphi = \sqrt{2} \cdot \sin \varphi \sqrt{1 + \cos \varphi} \quad | : \sin \varphi \quad (\sin \varphi \neq 0)$$

Lösungshinweis:  $\Rightarrow 2 \cdot \sin \varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} \quad |^2$

$$\Rightarrow 4 \cdot \sin^2 \varphi = 2(1 + \cos \varphi) \dots$$

- 13.0** Einer Kugel mit dem Radius  $r = x$  cm werden Kegel einbeschrieben.  
Der Winkel an der Spitze des Achsenschnittdreiecks von den Kegeln hat das Maß  $\gamma$ .
- 13.1** Zeichne einen Axialschnitt von Kugel und Kegel für  $x = 4,5$  und  $\gamma = 45^\circ$  !
- 13.2** Berechne den Kegelradius  $r_{Ke} = z$  cm in Abhängigkeit von  $x$  und  $\gamma$  ! (Nicht  $\frac{\gamma}{2}$  !)
- 13.3** Berechne die Kegelhöhe  $h = y$  cm in Abhängigkeit von  $x$  und  $\gamma$  ! (Nicht  $\frac{\gamma}{2}$  !)
- 13.4** Gib die Grenzen für  $\gamma$  an ! Für welchen Wert für  $\gamma$  wird die Kegelhöhe gleich  $\frac{x}{2}$  cm ?
- 13.5** Für welchen Wert für  $\gamma$  wird die Kegelhöhe gleich  $\frac{7}{4}x$  cm ?
- 13.6** Die Mantellinien sind  $s = u$  cm lang. Berechne  $s$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $\gamma$  !
- 13.7** Für welche Werte für  $\gamma$  wird die Mantellinie gleich  $x$ , gleich  $x\sqrt{2}$  cm und größer als  $\frac{3}{2}x$  cm ?
- 13.8** Berechne das Volumen  $V$  der Kegel in Abhängigkeit von  $x$  und  $\gamma$  !
- 13.9** Tabellarisiere den Volumenterm für  $x = 6$  im Intervall  $[0^\circ; 180^\circ]$  in Schritten  $\Delta\gamma = 15^\circ$  !  
Zeichne ein  $\gamma$ - $V$ -Diagramm !  
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $1 \text{ cm} \triangleq 15^\circ$ ;  $1 \text{ cm} \triangleq 30 \text{ cm}^3$

- 14.0** Einem geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius  $r_0 = 6$  cm und der Höhe  $h_0 = 9$  cm werden auf der Spitze stehende gerade Kreiskegel einbeschrieben. Die Spitzen aller einbeschriebenen Kegel fallen mit dem Höhenfußpunkt des ursprünglichen Kegels zusammen. Der Öffnungswinkel eines einbeschriebenen Kegels hat das Maß  $\beta$ , der Grundkreisradius misst  $x$  cm und die Höhe  $h$  cm.



- 14.1** Stelle  $h$ ,  $x$  und das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von  $\beta$  dar.

$$\left( \text{Teilergebnis : } V(\beta) = 72\pi \frac{\tan^2 \frac{\beta}{2}}{\left( \tan \frac{\beta}{2} + \frac{2}{3} \right)^3} \text{ cm}^3 \right)$$

# Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie

## Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 14.2 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung  $y = \frac{\tan^2 \frac{\beta}{2}}{\left(\tan \frac{\beta}{2} + \frac{2}{3}\right)^3}$  für

$0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ . Berechne  $\beta_0$  für den größten Funktionswert  $f(\beta_0)$  durch Intervallschachtelung auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und schließlich damit  $V_{\max}$ .

- 14.3 Stelle das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von  $x$  dar.

$$\left( \text{Ergebnis: } V(x) = \frac{\pi}{2} x^2 (6 - x) \text{ cm}^3 \right)$$

- 14.4 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung  $y = x^2(6 - x)$  für  $0 \leq x \leq 6$ . Dem Graph kann man entnehmen, dass vermutlich  $f(4 + d) \leq f(4)$  für  $d \in [0; 6]$  gilt. Weise dies durch Rechnung nach.

- 15.1 Geraden Kreiskegeln mit dem Öffnungswinkel  $\varphi$  und 8 cm langen Mantellinien werden Kugeln einbeschrieben. Stelle den Kugelradius  $\rho$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  dar.

$$\left( \text{Ergebnis: } \rho = \frac{4 \sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} \text{ cm} \right)$$

- 15.2 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung  $y = \frac{4 \sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}$  für  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

Entnimm dem Graphen  $\varphi_0$  für den größten Funktionswert  $f(\varphi_0)$ , und ermittle  $\varphi_0$  durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet. Berechne mit diesem Wert die Oberfläche der größten Inkugel und die Oberfläche des zugehörigen Kegels.

- 15.3 Begründe durch Rechnung, dass es keinen Kegel gibt, dessen Mantelfläche gleich der Oberfläche seiner Inkugel ist.