Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben ab Seite 25

4. Zufallsgrößen / Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

4.1 Zufallsgröße / Zufallsvariable

Definition:
Eine Zufallsgröße (Zufallsvariable) X ordnet jedem Versuchsergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zu. Das heißt, die Zufallsgröße X nimmt bei jedem Ergebnis einen Zahlenwert x_i an.

1. $X = x_i$ beschreibt dabei das Ereignis, das aus allen Ergebnissen besteht, bei denen X die Zahl x_i annimmt.

2. Die Zufallsgröße X nennt man **diskret**, wenn sie nur abzählbar viele Werte annehmen kann.

3. $P(X = x_i)$ ist die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses $X = x_i$.

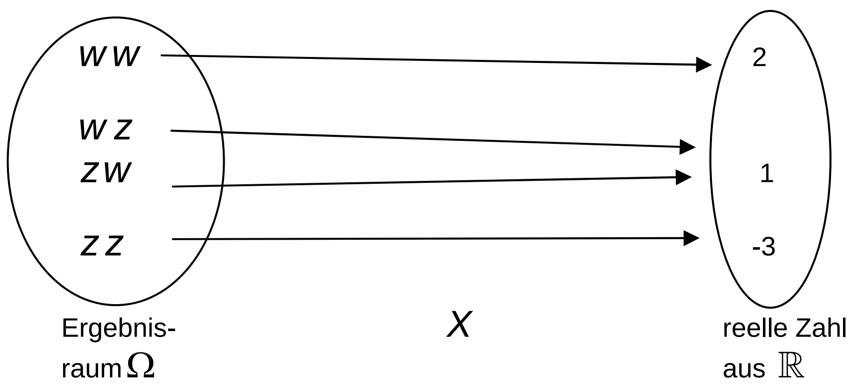
Beispiel:
Zwei Spieler haben eine Münze. Sie werfen sie zweimal und schließen eine Wette ab.
Spieler A bekommt von Spieler B 2.- € wenn zweimal Wappen und
1.- € wenn einmal Wappen erscheint.
Spieler A muss an Spieler B 3.- € bezahlen, wenn keinmal Wappen erscheint.

Lösung:
Zunächst ist es notwendig für den **Gewinn** des Spielers A eine Variable einzuführen.
Diese Variable muss zufällig die Werte 2, 1 und - 3 annehmen können (den Verlust von 3.- € behandeln wir wie einen Gewinn von - 3.- €) und man nennt sie **Zufallsvariable X** oder **Zufallsgröße X**.

Für das Ereignis $\{ww\}$ (= es fällt zweimal Wappen) schreiben wir dann $X = 2$.

Für das Ereignis $\{wz,\ zw\}$ (= es erscheint einmal Wappen) schreiben wir $X = 1$.

Für das Ereignis $\{zz\}$ (= Wappen erscheint keinmal) schreiben wir $X = -3$.



Stochastik - Kapitel 4

Als Wahrscheinlichkeiten für die **Zufallsvariablen** X erhalten wir:

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\qquad P(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};\qquad P(X=-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

4.2 Die Verteilung einer diskreten Zufallsgröße / Zufallsvariable

Beispiel:
Hans spielt zum ersten Mal Roulette. Er setzt eine Einheit auf das erste Dutzend (= die Zahlen von 1 bis 12). Sollte er gewinnen, erhält er den dreifachen Einsatz ausbezahlt, andernfalls ist sein Einsatz verloren.
Die Zufallsgröße X beschreibe den Reingewinn pro Spiel (der Reingewinn entspricht der Auszahlungssumme abzüglich des Einsatzes). Sollte das Dutzend

$D=\{1,2,3,\ldots,12\}$ eintreten, nimmt X den Wert 3 - 1 = 2 an, andernfalls den Wert -1.

Man kann also sagen, dass die Zufallsgröße X jedem Element aus D den Wert 2 und allen übrigen Elementen den Wert -1 zuordnet. Man schreibt:

$$D \xrightarrow{X} 2 \qquad \overline{D} \xrightarrow{X} -1$$

Im Roulette gibt es 37 mögliche Zahlen; die 1 bis 36 und die 0.

Somit gilt:

$$P(X=2)=P\left(\{\omega \mid X(\omega)=2\}\right)=P(D)=\frac{12}{37}$$

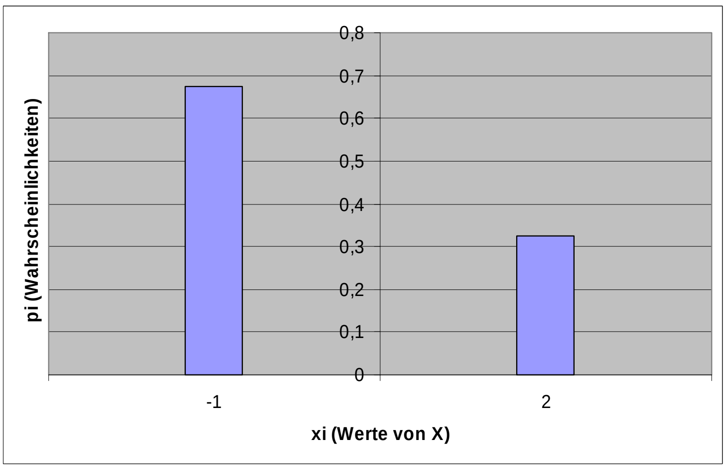
und

$$P(X=-1)=P(\overline{D})=\frac{25}{37}$$

Die Zufallsvariable besitzt deshalb die folgende **Verteilung**:

x_i (Werte von X)	-1	2
p_i (Wahrscheinlichkeiten)	$\frac{25}{37}\approx 0{,}676$	$\frac{12}{37}\approx 0{,}324$

Eine solche Verteilung kann man mit Hilfe eines Stabdiagrammes oder Säulendiagrammes am deutlichsten darstellen:



Stochastik - Kapitel 4

Merke:
Die Gesamtheit aller Paare (x_i, p_i) mit $p_i = P(X = x_i),\; i = 1, 2, \ldots$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Wahrscheinlichkeitsfunktion** der diskreten Zufallsgröße X.
Man schreibt auch $W: x \mapsto P(X = x_i)$.

Die Summe der Funktionswerte von W ist 1: $\sum_{x_i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$ (das bedeutet, dass die Summe aller einzelnen Wahrscheinlichkeiten immer 1 ergibt)

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** W lässt sich graphisch mit Hilfe einer Wertetabelle (siehe Beispiel oben) oder im Koordinatensystem durch einen Graph (lauter isolierte Punkte), ein Stabdiagramm (siehe Beispiel oben) oder ein Histogramm (dazu später mehr) darstellen.

Anmerkungen:

■ Die Funktion $F: x \mapsto P(X \le x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt **kumulative Verteilungsfunktion (Summenfunktion)** der Zufallsvariablen X.
$F(X) = P(X \le x)$ ist immer die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, der kleiner oder auch gleich x ist.

■ Die Zufallsvariable X nennt man **stetig**, wenn für ihre Verteilungsfunktion $F: x \mapsto F(x) = P(X \le x)$ folgendes gilt:

$F(x)$ ist stetig und $F(x)$ ist (bis auf einige Punkte auf der x-Achse) differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ muß stetig sein.
$\Rightarrow$ Diese Funktion heißt dann **Dichtefunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

$\Rightarrow$ F kann also folgendermaßen dargestellt werden: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)$

■ In der graphischen Darstellung ist die Verteilungsfunktion eine Treppenfunktion, die an den Stellen $x = x_i$ Sprünge der Höhe $h_i = P(X = x_i)$ macht.
(wie eine solche Treppenfunktion genau aussieht werden wir später noch sehen)

Rechenregeln mit Hilfe der Verteilungsfunktion:

1. $P(X \le a) = F(a)$
2. $P(X > b) = 1 - P(X \le b) = 1 - F(b)$
3. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

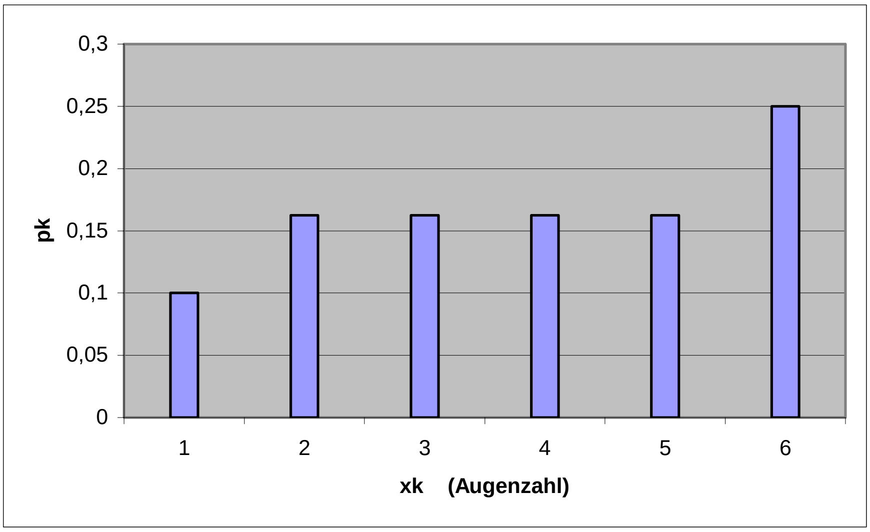
Stochastik - Kapitel 4

1. Übungs-Beispiel:

Bei einem Spiel wird ein verfälschter Würfel verwendet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlen ist allerdings bekannt:

x_k	1	2	3	4	5	6
p_k	0,1	0,1625	0,1625	0,1625	0,1625	0,25

Diese Wahrscheinlichkeiten stellt man in einem Stabdiagramm oder Säulendiagramm dar:



Zunächst bestimmen wir die Verteilungsfunktion $F(X) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p_i$.

Dazu ist es notwendig die Summenwahrscheinlichkeiten $F(x_k) = P(X \le x_k) = \sum_{x_i \le x_k} p_i$

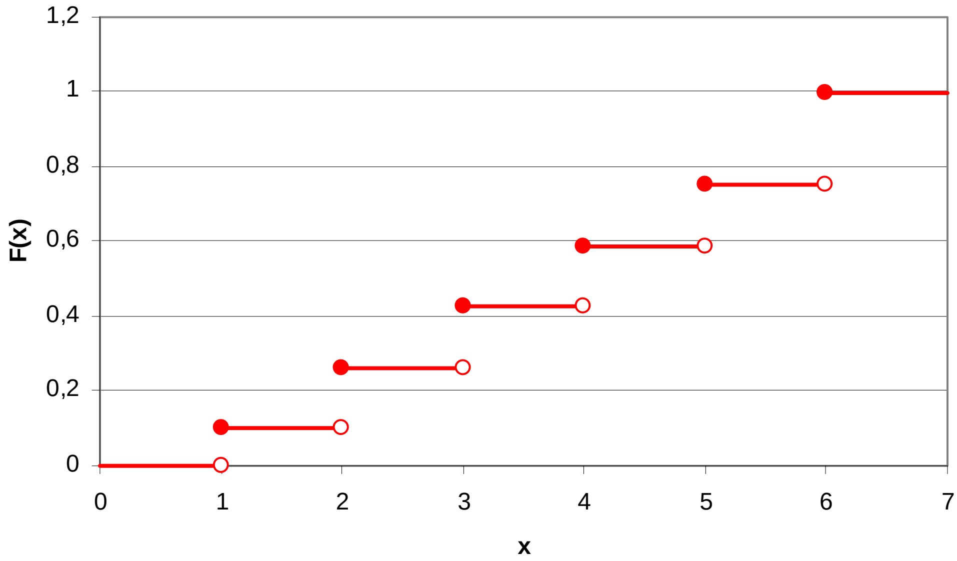
zu berechnen:

x_k	p_k	$F(x_k) = \sum_{x_i \le x_k} p_i$
1	0,1	0,1
2	0,1625	0,2625
3	0,1625	0,425
4	0,1625	0,5875
5	0,1625	0,75
6	0,25	1

Stochastik - Kapitel 4

Jetzt können wir die Verteilungsfunktion zeichnen.

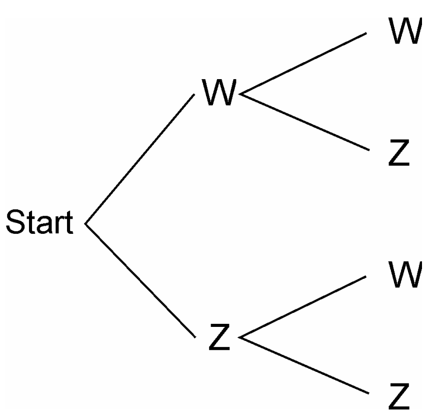
Merke:
Die Verteilungsfunktion F einer diskreten Zufallsvariable ist eine **Treppenfunktion**. Die Sprungstellen sind immer die Werte x_i der Zufallsgrößen und die Sprunghöhen die entsprechenden berechneten Wahrscheinlichkeiten p_i.



2. Übungs-Beispiel:

Hans wirft zweimal eine Laplace-Münze.

a) Gib den Ergebnisraum Ω an und zeichne ein Baumdiagramm.



$$\Omega = \{WW, WZ, ZW, ZZ\}$$

Stochastik - Kapitel 4

b) Hans spielt mit seinem Freund Michael ein Glücksspiel nach folgenden Regeln:
- man erhält 2 Euro wenn zweimal Wappen fällt
- man erhält 1 Euro wenn nur einmal Wappen fällt
- man muss 2 Euro bezahlen, wenn keinmal Wappen, sondern zweimal Zahl fällt.

Die Zufallsvariable X sei der Gewinn in Euro.
Gib mit Hilfe all dieser Daten nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Ergebnis ω	WW	WZ	ZW	ZZ
Gewinn x_i in €	2	1	1	- 2

$W : x_i \mapsto P(X = x_i)$

Gewinn x_i in €	2	1	- 2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(In dieser Tabelle wird die Wahrscheinlichkeit für WZ bzw. ZW nur einmal berechnet. In welcher Reihenfolge Zahl und Wappen fallen spielt nämlich keine Rolle)

c) Bestimme nun die Verteilungsfunktion F. Berechne anschließend, mit welcher Wahrscheinlichkeit man höchstens 1 Euro gewinnt.

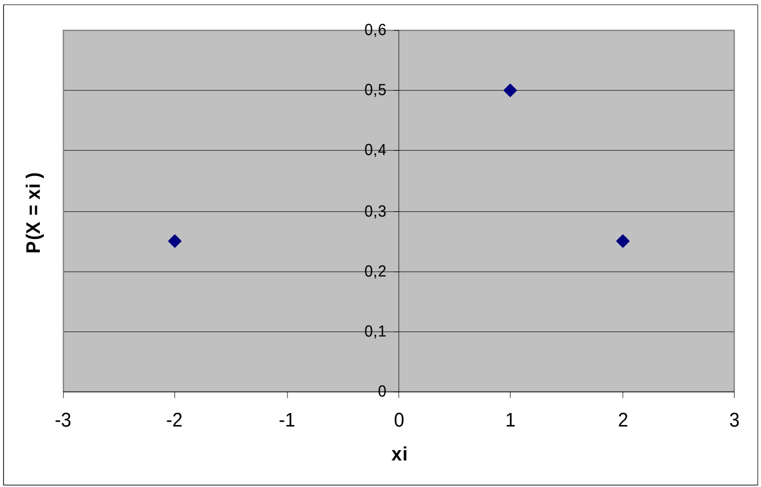
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0,25 & \text{für } -2 \le x < 1 \\ 0,75 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{P(X \le 1) = F(1) = 0,75}}$$

Die Wahrscheinlichkeit höchstens 1 € (oder weniger) zu gewinnen liegt bei 75%.

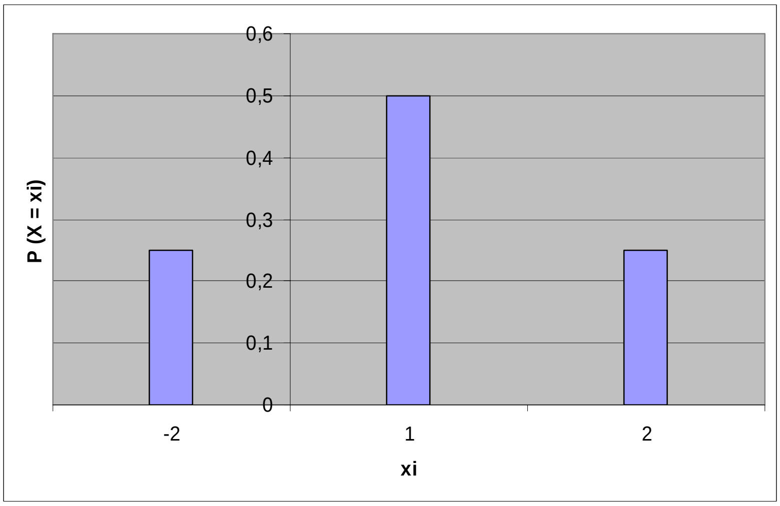
d) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsfunktion (3 verschiedene Darstellungsmöglichkeiten: Funktionsgraph, Stabdiagramm, Histogramm) und anschließend die Verteilungsfunktion.

Funktionsgraph:



Stabdiagramm bzw. Säulendiagramm:

Die Stäbe bzw. Säulen haben folgende Länge $\Rightarrow$ $W(x_i) = P(X = x_i)$

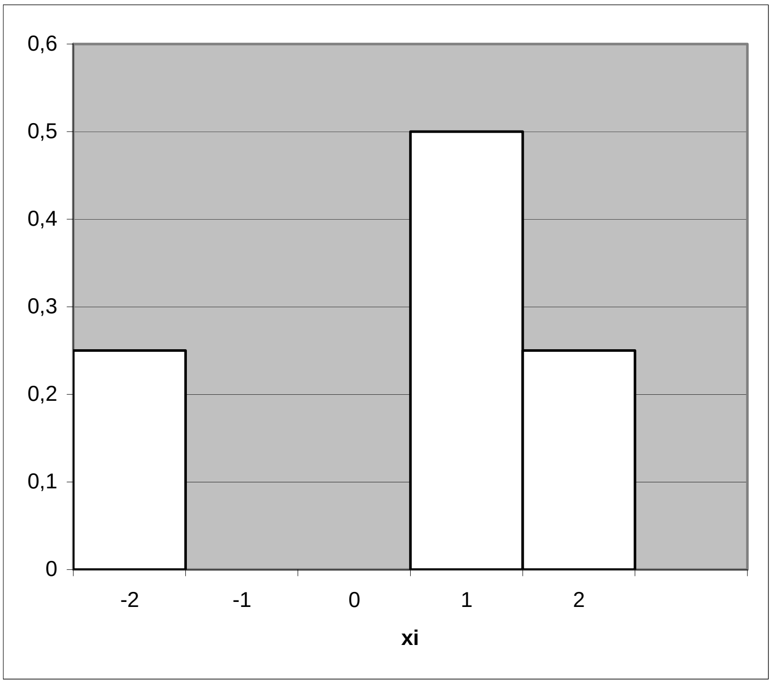


Histogramm:

Die Flächeninhalte der Rechtecke haben jeweils den Wert $W(x_i) = P(X = x_i)$.

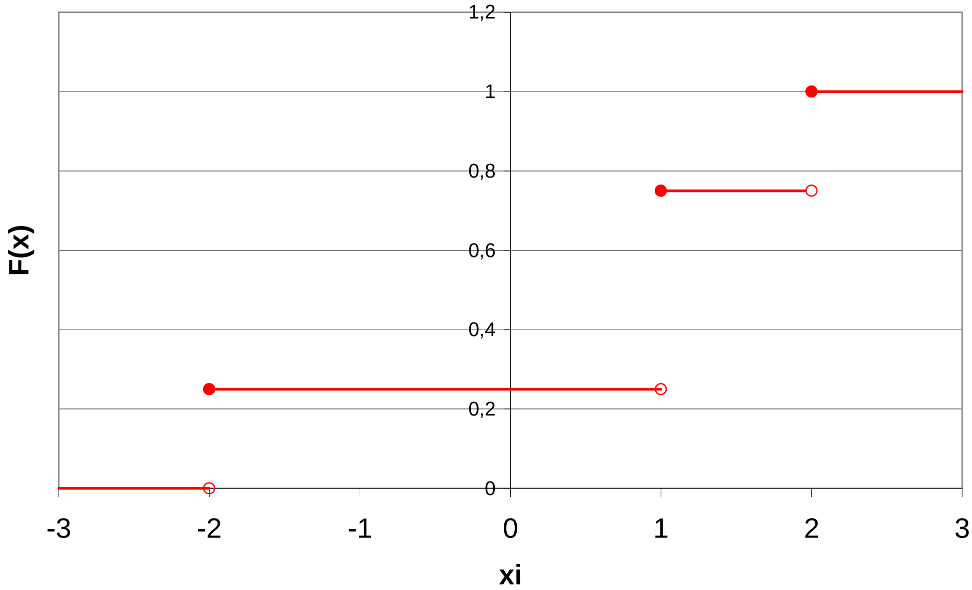
Die Flächensumme aller dieser Rechtecke ergibt 1

(Da insgesamt immer die Wahrscheinlichkeit von 100% erreicht wird) !



Stochastik - Kapitel 4

Verteilungsfunktion F:



■ Wir haben bereits gelernt, dass die Verteilungsfunktion F einer diskreten Zufallsvariable X eine Treppenfunktion ist. An den Stellen $x = x_i$ macht sie Sprünge der Höhe $h_i = P(X = x_i)$.

■ Die Verteilungsfunktion F nimmt monoton zu und ist rechtsseitig stetig.
Darum gilt: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
das heißt also, dass F wegen $0 \leq F(x) \leq 1$ beschränkt ist.

Stochastik - Kapitel 4

4.3 Maßzahlen einer diskreten Zufallsvariablen

4.3.1 Der Erwartungswert

■ Zufallsvariablen sind dann eindeutig bestimmt, wenn man ihre Wahrscheinlichkeits-verteilung kennt.

■ Einfach ist es allerdings, wenn man Informationen, die in der Verteilung einer Zufallsvariablen stecken durch Zahlenwerte verdeutlichen kann.

■ Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen ist durch eine Gesamtheit von Beobachtungen gegeben. Darum wird man versuchen, charakteristische Zahlenwerte so anzugeben, dass sie alle Beobachtungen repräsentieren.

■ Diese Zahlenwerte kann man in 2 Gruppen einteilen:
⇒ Mittelwerte: sie informieren über die Lage der Verteilung
⇒ Streuungswerte: sie informieren über die Breite der Verteilung

Definition „Erwartungswert":

X sei eine diskrete Zufallsvariable und nehme die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ (wobei $i = 1, 2, 3 \ldots, n$) an.

Man bezeichnet die Zahl $\mu = E(X)$ dann als **Erwartungswert der diskreten Zufallsvariablen X.**

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

oder

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i),\; i = 1, 2, \ldots$$

Anmerkung:
■ Der Erwartungswert drückt das aus, was man auf lange Sicht gesehen erwarten kann.
Ist X beispielsweise der Gewinn bei einem Glücksspiel, dann gibt μ den **durchschnittlichen Gewinn** bei n Spielen an.

Stochastik - Kapitel 4

1. Übungs-Beispiel:

Evi wirft eine Laplace-Münze solange, bis Wappen erscheint. Höchstens wirft sie die Münze allerdings viermal.
Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Würfe an.
Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne den Erwartungswert $E(X)$.

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(X=4)=1-\sum_{i=1}^{3}P(X=i)$$

$$\mu=E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=\underline{\underline{1{,}875}}$$

2. Übungs-Beispiel:

Ein Schreiner notiert sich seine täglichen Arbeitszeiten ganz genau.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der vollen Stunden, die der Schreiner täglich benötigt um Aufträge und Arbeiten zu erledigen.
Es gilt für die Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsvariablen X folgendes:

x	1	2	3	4	5	6	sonst
$W(x)$	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0

Berechne nun die durchschnittliche tägliche Arbeitszeit des Schreiners.

⇒ Die Aufgabenstellung „durchschnittliche tägliche Arbeitszeit" gibt einen Hinweis darauf, dass man hier den Erwartungswert μ berechnen soll.

$$\mu=1\cdot0{,}05+2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}25+4\cdot0{,}3+5\cdot0{,}2+6\cdot0{,}1=\underline{\underline{3{,}8}}$$

⇒ Die durchschnittliche tägliche Arbeitszeit des Schreiners beträgt somit 3,8 Stunden.

Anmerkung:

■ Der Erwartungswert muss nicht unbedingt einer der Werte sein, die die Zufallsvariable annehmen kann.

Rechenregeln für den Erwartungswert:

■ Es gilt **immer**: (auch bei stochastischer Abhängigkeit von X und Y).
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ „Additivität des Erwartungswertes"

■ Es gilt bei stochastischer Unabhängigkeit von X und Y:
$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ „Produktdarstellung"

Stochastik - Kapitel 4

4.3.2 Die Varianz und die Standardabweichung

■ Durch eine weitere Maßzahl wird die mittlere Abweichung der Funktionswerte vom Erwartungswert charakterisiert.

■ Das dazu gebräuchlichste Maß ist die mittlere quadratische Abweichung, auch **Varianz** genannt.

■ Anders gesagt beschreibt die Varianz also die Streuung der Funktionswerte einer Zufallsvariablen X um ihren Erwartungswert $E(X)$.

Definition „Varianz“:

Eine diskrete Zufallsvariable X nimmt mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ (wobei $i = 1,2,...,n$) die Werte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ an. Sie besitzt außerdem den Erwartungswert μ.

Die reelle Zahl $V(X) = \sigma^2$ heißt Varianz der diskreten Zufallsvariablen X.

$$V(X) = \left(x_1 - \mu\right)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$$

oder

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_i \left(x_i - \mu\right)^2 \cdot P(X = x_i).$$

Rechenregel für die Varianz:

Sind X und Y stochastisch unabhängig, gilt:

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ „Additivität der Varianz“

Anmerkung:

■ Die Varianz hat als Streuungsmaß zwei Nachteile:

⇒ Abweichungen vom Erwartungswert, die größer sind als 1 (sogenannte „Ausreisser“) sind auf Grund der Quadratur gewichtiger als Abweichungen die keiner sind als 1.

⇒ Die Benennung der Varianz stimmt nicht mit der Benennung der Zufallsvariablen überein (z.B. Einheit der Varianz ist quadriert, die der Zufallsvariablen nicht).
Deshalb führte man noch die folgende Maßzahl ein.

Definition „Standardabweichung“:

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ heißt Standardabweichung der diskreten Zufallsvariablen X.

Stochastik - Kapitel 4

Übungs-Beispiel:

Hans ist 30 Jahre alt und schließt eine Risikolebensversicherung über 20.000 Euro ab.
Der jährliche Beitrag sei 100 Euro.
Die Sterbewahrscheinlichkeit während eines Jahres betrage 0,0029.

Die Zufallsvariable X beschreibe den Reingewinn der Versicherungsgesellschaft aus diesem Risikoleben-Vertrag während des ersten Jahres.

Für X gilt: $\Rightarrow$ im Todesfall: $X = -20000 + 100 = -19900$
(d.h., die Versicherung müsste 20000 Euro auszahlen und hat dabei erst einen Jahresbeitrag von 100 Euro von Hans erhalten)

$\Rightarrow$ im Überlebensfall: $X = 100$
(d.h. die Versicherung muss keine Todesfallleistung ausbezahlen und hat dabei den ersten Jahresbeitrag von 100 Euro erhalten)

X besitzt somit folgende Verteilung:

Werte von X	-19 900	100
Wahrscheinlichkeiten	0,0029	0,9971

Daraus folgt:
Erwartungswert: $E(X) = -19900 \cdot 0{,}0029 + 100 \cdot 0{,}9971 = \underline{\underline{42{,}00\ €}}$

Varianz: $V(X) = (-19900 - 42)^2 \cdot 0{,}0029 + (100 - 42)^2 \cdot 0{,}9971 = \underline{\underline{1156636\ €^2}}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)} = \underline{\underline{1075{,}47\ €}}$

4.3.3 Wichtige Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

1.

Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Sonderfälle: $E(b) = b$; $E(aX) = a \cdot E(X)$

2.

Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

Sonderfälle: $V(b) = 0$; $V(aX) = a^2 \cdot V(X)$

$\sigma(b) = 0$; $\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$

3.

Verschiebungssatz:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Stochastik - Kapitel 4

4.3.4 Die Standardisierung

Definition:

Eine Zufallsvariable Z mit dem Erwartungswert $E(Z)=0$ und der Standardabweichung $\sigma(Z)=1$ heißt **standardisiert**.

Das bedeutet, dass zu jeder Zufallsvariablen X eine standardisierte Zufallsvariable $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ existiert.

Anmerkung:

■ Es ist wichtig die Zufallsvariablen $Y=X+X$ und $Z=2\cdot X$ zu unterscheiden.

■ Für $Y=X+X$ gilt:
$$E(Y)=E(X+X)=E(X)+E(X)=2\cdot E(X)$$
$$V(Y)=V(X+X)=V(X)+V(X)=2\cdot V(X)$$

■ Für $Z=2\cdot X$ gilt:
$$E(Z)=E(2\cdot X)=2\cdot E(X)$$
$$V(Z)=V(2\cdot X)=4\cdot V(X)$$

Übungs-Beispiel:

Die Zufallsvariable X hat folgende Verteilung:

x_i	2	3
$P(X=x_i)$	0,4	0,6

$E(X)=2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}6=2{,}6$

$V(X)=4\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}6-2{,}6^2=0{,}24$

$Y=X+X$: Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 4, 5, 6 an.
Somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung folgendes:

Y	4	5	6
$P(Y=y)$	0,16	0,48	0,36

$E(Y)=2\cdot E(X)=5{,}2$

$V(Y)=2\cdot V(X)=0{,}48$

(auch beim direkten Berechnen kommt man auf diese beiden Werte)

$Z=2\cdot X$: Die Zufallsvariable Z nimmt die Werte 4 und 6 an.
Somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung folgendes:

Z	4	6
$P(Z=z)$	0,4	0,6

$E(Z) = E(2 \cdot X) = 2 \cdot E(X) = 5{,}2$
$V(Z) = V(2 \cdot X) = 4 \cdot V(X) = 0{,}96$
(diese Werte erhält man bei direkter Berechnung ebenso)

4.4 Die Binomialverteilung

Definition: Die Binomialverteilung beschreibt das „Ziehen mit Zurücklegen“ beziehungsweise das wiederholte Ausführen eines Zufallsexperimentes unter den jeweils gleichen Bedingungen.

■ Einfacher erklärt:

Wir betrachten ein Bernoulli-Experiment:
Es werde n-mal unabhängig hintereinander ausgeführt.
Wichtig zu beachten ist dabei jedes Mal, ob das Ereignis A eintritt oder ob das Ereignis $\overline{A}$ eintritt.
Das Ereignis A trete mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = P(A)$ ein.
Die Zufallsgröße X sei die Anzahl des Auftretens von A.

■ Eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit den beiden Parametern n und p beschreibt in einer unabhängigen Versuchsserie mit dem Umfang n die Anzahl all derjenigen Versuchen, bei denen das Ereignis A eintritt. Das ist also die **absolute Häufigkeit** von A.
Das Ereignis A besitzt dabei bei jedem Versuch immer die Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$.
Dabei ist es unwichtig, wie der vorangegangene Versuch ausgegangen ist
(Vergleiche: genauso ist es beim „Ziehen mit Zurücklegen“).

Wir folgern also:

Eine Zufallsgröße X heißt dann **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion folgendes gilt:
$P(X = k) = B_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, wobei k = 0, 1, 2, … ,n

■ Der Buchstabe B steht für Binomialverteilung. Er kann aber vernachlässigt werden.

■ Für die Verteilungsfunktion F gilt:
$F(x) = B_p^n(X \le x) = \sum\limits_{k \le x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, wobei k ganzzahlig ist mit $0 \le k \le n$.

Stochastik - Kapitel 4

■ Für die Maßzahlen gilt:

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

■ Für gebräuchliche p und n sind die Werte der Binomialverteilung tabelliert. Das bedeutet, dass man für sie nicht jedes Mal die Berechnung ausführen muss, sondern die Ergebniswerte einfach aus der Tabelle ablesen kann.

Übungs-Beispiel:

Der Besitzer einer Tankstelle führt eine Umfrage unter seinen Kunden durch. Dabei findet er heraus, dass allen ankommenden Autos mit einer 30%igen Wahrscheinlichkeit Diesel tanken.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 10 Autos genau fünf Diesel tanken ?

Gegeben: $n = 10$ $\quad k = 5$ $\quad p = 0{,}3$

Binomialverteilung: $P(X = k) = B_p^k(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

$\Rightarrow P(X = 5) = B_{0,3}^{10}(X = 5) = 0{,}10292 = \underline{\underline{10{,}29\%}}$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tanken von den nächsten 10 Autos höchstens sechs Diesel ?

$P(X \leq 6) = B_{0,3}^{10}(X \leq 6) = 0{,}98941 = \underline{\underline{98{,}94\%}}$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nächsten 10 Fahrzeugen mindestens eines mit Diesel betankt werden muss ?

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - B_{0,3}^{10}(X = 0) = 1 - 0{,}02825 = 0{,}97175 = \underline{\underline{97{,}18\%}}$

d) Wie viele Fahrzeuge die Diesel tanken erwartet man unter den nächsten 100 Kunden ?

$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{30}}$

Stochastik - Kapitel 4

4.5 Die Hypergeometrische Verteilung

■ Hier sehen wir den umgekehrten Fall zur Binomialverteilung. Durch die hypergeometrische Verteilung wird das „Ziehen ohne Zurücklegen“ beschrieben.

■ Einfacher erklärt:
Wir stellen uns eine Menge mit insgesamt N Elementen vor.
Von diesen N Elementen besitzen K das Merkmal A.
Es werden nun zufällig n Elemente entnommen.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl aller gezogenen Elemente, die die Eigenschaft A aufweisen.

Die hypergeometrische Verteilung tritt also beim Ziehen ohne Zurücklegen aus einer endlichen Grundgesamtheit auf.
All diese Experimente kann man durch das uns bereits bekannte Urnenmodell ohne Zurücklegen beschreiben:
■ Eine Urne erhalte N Kugeln, von denen genau M schwarz sind. Aus der Urne werden nun zufällig n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X beschreibt dabei die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe vom Umfang n.

Es gilt für die **hypergeometrische Verteilung**:

$$p_k = P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ wobei } 0 \le k \le M \text{ und } 0 \le n-k \le N-M$$

Beachte:
Es existieren verschiedene Schreibweisen. Deshalb muss man unbedingt auf die Bezeichnung der einzelnen Elemente achten. Eine häufig vorkommende Form ist folgende:

$$p_k = P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ mit k = 0, 1, 2, … ,n.}$$

(Man sieht, dass hier die Bezeichnung M gegen K ausgetauscht wurde !)

Stochastik - Kapitel 4

■ Für die Verteilungsfunktion F gilt:

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$, wobei k ganzzahlig ist mit $0 \leq k \leq n$.

■ Für die Maßzahlen gilt:

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$ oder anders $E(X) = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$ oder $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

(man sieht, dass hier $p = \frac{M}{N}$ oder $p = \frac{K}{N}$)

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Übungs-Beispiel:

In einer Holzkiste bewahrt ein Hobby-Schreiner 20 Werkstücke auf, von denen drei fehlerhaft sind. Es werden aus der Kiste nun zufällig fünf Stücke ausgewählt.
X sei die Anzahl der fehlerhaften Stücke in der Stichprobe.

a) Der Schreiner zieht mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei jedes Mal ein fehlerhaftes Stück zieht ?

Gegeben: $n = 5$ $\quad p = \frac{3}{20} = 0{,}15$ $\quad k = 3$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{5-3} = 0{,}0244 = \underline{\underline{2{,}44\%}}$$

b) Der Schreiner zieht danach ohne Zurücklegen. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass er die drei fehlerhaften Stücke erwischt ?

Gegeben: $n = 5$ $\quad M = 3$ $\quad N = 20$ $\quad k = 3$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{17}{5-3}}{\binom{20}{5}} = 0{,}00877 = \underline{\underline{0{,}88\%}}$$

Stochastik - Kapitel 4

4.6 Die Poisson-Verteilung

Liegt uns ein großes n und ein kleines p vor, ist es sehr schwierig und langwierig, die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung zu berechnen.
Als Faustregel dafür, was man als „großes n bzw, als kleines p“ bezeichnen darf, verwendet man folgende Werte: $p \leq 0{,}1$ und $n \geq 100$.

Mit $n \cdot p = \lambda$ (anstelle des λ ist manchmal auch die Bezeichnung μ zu finden) gilt nach Poisson:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ np=\lambda}} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Bei der Bildung dieses Grenzwertes geht p gegen 0, wenn $n \to \infty$. Allerdings geschieht das immer so, dass $n \cdot p = \lambda$ gilt. $n \cdot p = \lambda$ ist also konstant.

Merke:

■ Eine Zufallsvariable X ist **poissonverteilt**, wenn mit einem Parameter $\lambda > 0$ gilt:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad k = 0, 1, ...$$

■ Für die Verteilungsfunktion F gilt:

$$F(X) = P(X \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

■ Für die Maßzahlen gilt:

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

4.6.1 Anwendung der Poissonverteilung

Die Poisson-Verteilung lässt sich auf drei unterschiedliche Arten anwenden:

(1) Für große n und kleine p lässt sich eine Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung approximieren. Einfacher gesagt, verwendet man die Poissonverteilung quasi dazu um eine Näherung der Binomialverteilung zu erhalten.

1. Beispiel:
In Vergissmeinnicht-Blumensamen-Packungen sind jeweils 1000 Körner enthalten. Man weiß aus Erfahrung, dass 0,5 % der Körner nicht keimen und deshalb keine Vergissmeinnicht wachsen werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Packung mehr als 8 nicht keimende Samenkörner zu finden ?

Stochastik - Kapitel 4

Lösung:
Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der nicht keimenden Samen.
Es gilt folglich:

$$P(X>8)=1-P(X\leq 8)=1-B_{0,005}^{1000}(X\leq 8)\approx$$

$$1-\left(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}+\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!}+\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}\right)e^{-5}\approx$$

$$\approx 1-0{,}93191=0{,}06809\approx \underline{\underline{6{,}81\%}}$$

Es befinden sich in einer Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,81% mehr als 8 nicht keimende Samenkörner.

(2) Zur Beschreibung von Ereignissen, bei denen uns lediglich der Mittelwert μ bekannt ist.

2. Beispiel:
Ein Grenzpolizist hat genau aufgepasst und festgestellt, dass an seinem sehr ruhig gelegenem Grenzübergang durchschnittlich nur 3 Autos täglich vorbei kommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass morgen 4 Autos den Grenzübergang passieren?

Lösung:
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Autos, die pro Tag den Grenzübergang passieren.
Es gilt dann: $\mu=3;\quad k=4;$

$$P_3(X=4)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\frac{3^4\cdot e^{-3}}{4!}=0{,}163803\approx\underline{\underline{16{,}4\%}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass morgen vier Autos die Grenze überqueren beläuft sich auf 16,4%.

(3) Als Beschreibung oder zur Überprüfung einer empirischen Verteilung.

3. Beispiel:
In einem großen Bäckereibetrieb werden täglich 2000 Eier verarbeitet. Der Bäckereimeister hat die letzten 200 Tage genau Buch über sogenannte „Zweidottereier“ geführt. Aus seinen Aufzeichnungen ergibt sich folgende Verteilung:

Anzahl der Zweidottereier	0	1	2	3	4	5 oder mehr
Anzahl der Tage	110	65	21	3	1	0

Überprüfe nun, ob die Anzahl der Zweidottereier poissonverteilt ist.

Stochastik - Kapitel 4

Lösung:

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Zweidottereier an.

Es gilt dann: $\mu = \frac{1}{200}(0 \cdot 110 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 0{,}6.$

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeiten $P_{0,6}(X = k)$, multiplizieren diese Werte anschließend mit 200 und vergleichen unsere Ergebnisse dann mit den vom Bäckermeister beobachteten Werten.

Anzahl k der Zweidottereier	0	1	2	3	4	5 oder mehr
Anzahl der Tage	110	65	21	3	1	0
$P_{0,6}(X = k)$	0,549	0,329	0,099	0,020	0,003	0
$200 \cdot P_{0,6}(X = k)$	109,8	65,8	19,8	4	0,6	0

Wir sehen, dass die errechneten Werte (4.Zeile) mit den beobachteten Werten (2. Zeile) ziemlich gut übereinstimmen, d.h. man kann sagen, dass die Anzahl der Zweidottereier nahezu $P_{0,6}$-verteilt ist.

Stochastik - Kapitel 4

4.7 Normalverteilungen

4.7.1 Die Standard-Normalverteilung

- Von C.F. Gauß eingeführt
- Ist die zentrale Verteilung der Wahrscheinlichkeitsrechung
- Viele Zufallsgrößen die wir in der Praxis beobachten können, folgen dieser Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $E(X)=0$ und $Var(X)=1$ nennt man normalverteilt, wenn X

a) folgende Dichte besitzt: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

b) folgende Verteilungsfunktion besitzt: $\Phi(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-u^2}{2}}du$.

Dieses Integral können wir nicht berechnen und verwenden deshalb zur Ermittlung von Tabellenwerten (Tabellen in statistischen Formelsammlungen) sogenannte numerische Verfahren.

Für jedes $c>0$ gilt: $P(-c\le X\le c)=2\Phi(C)-1$.

Beweis: $P(-c\le X\le c)=P(X\le c)-P(X<-c)$

weil X stetig ist, gilt

$P(X<-c)=P(X\le -c)$

$$P(X\le -c)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-c}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

Allgemeine Formel der Integralrechnung:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-c}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(0)=0{,}5 \text{ (wegen Symmetrie)}$$

weil $e^{-\frac{u^2}{2}}$ gerade ist, erhält man

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{c}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(c)-\Phi(0)=\Phi(c)-0{,}5$$

Als Folge daraus:

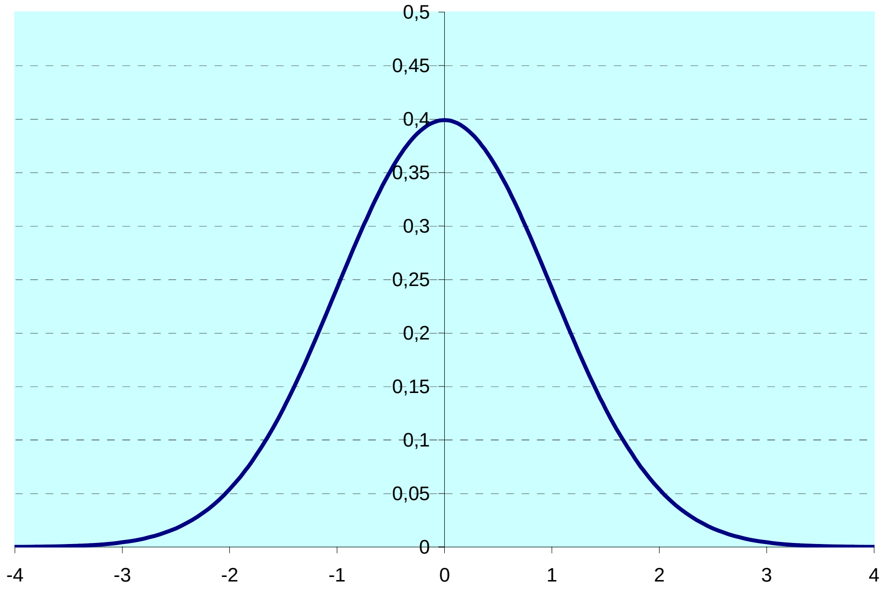
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-c}e^{-\frac{u^2}{2}}du=0{,}5-\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)=0{,}5-\left(\Phi(c)-\Phi(0)\right)=1-\Phi(c)=P(X<-c)$$

Endlich:

$$P(-c\le X\le c)=\Phi(c)-\left(1-\Phi(c)\right)=2\Phi(c)-1$$

Graphische Darstellung zur Verdeutlichung:

Dichtefunktion:



Erklärungs-Beispiel:

Die Grenze c können wir nun mit Hilfe einer gegebenen Wahrscheinlichkeit γ ermitteln, wobei $P(-c \leq X \leq c) = \gamma$

$\gamma = 2\Phi(c) - 1;\qquad \Phi(C) = \dfrac{1+\gamma}{2}$.

Damit ist c das $\dfrac{1+\gamma}{2}$ - Quantil $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, also diejenige Stelle mit $\Phi(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \dfrac{1+\gamma}{2}$.

Zahlenbeispiel: $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow c = 1{,}96$ (Tabellenwert)

Merke:

Die Zufallsgröße X heißt **normalverteilt** mit den Parametern μ und σ, wenn für die Dichtefunktion f Folgendes gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R},\quad \mu \in \mathbb{R},\quad \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Abgekürzt schreibt man: X ist $N(\mu;\sigma)$ - verteilt.

Stochastik - Kapitel 4

Wichtig!!!!!!

- Jede $N(\mu;\sigma)$ - verteilte Zufallsvariable X kann durch $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$
  (man spricht hier von der sog. „Standardisierung“ und verwendet anstelle des U´s auch das Zeichen Phi: „Φ“)

  auf eine $N(0;1)$ - verteilte Zufallsvariable transformiert werden.

- Auch die Verteilungsfunktion F erhält man über diese Standardisierung:
  $F(x) = P(X \le x) = P(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$

- Allgemein formuliert gilt also somit:
  $P(a \le X \le b) = \Phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$ mit $a < b$

  $P(X = x) = 0$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$.

1. Beispiel:

Wir nehmen an, dass X die Füllmenge von Flaschen darstelle und normalverteilt sei.
Der Erwartungswert μ sei abhängig von der Einstellung der Abfüllmaschine.
Die Standardabweichung $\sigma = 3$ hingegen sei abhängig von der Einstellung für μ.
Die Flasche ist mit einem Aufkleber versehen, der einen Mindestinhalt von 980 ml angibt.

Wie groß muß μ mindestens sein, damit dieser Aufkleber auf Dauer bei mindestens

a) 95%

b) 99% der Produktionsmenge korrekte Angaben macht ?

Lösung zum 1. Beispiel:

Wir suchen das minimale μ, wobei

$\gamma = P(X \ge 980) = P\left(\dfrac{X-\mu}{3} \ge \dfrac{980-\mu}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{980-\mu}{3}\right)$ ist.

Formel:

$$\Phi(-c) + \Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-c} e^{-\frac{u^2}{2}}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-c} e^{-\frac{u^2}{2}}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = P(X \le \infty) = 1 \quad \text{für ein beliebiges c}$$

Das bedeutet also, dass $\Phi\left(\dfrac{980-\mu}{3}\right) = 1-\gamma \;\Leftrightarrow\; \Phi\left(\dfrac{\mu-980}{3}\right) = \gamma$

Stochastik - Kapitel 4

a) $\gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mu - 980}{3} = 1{,}645 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = 984{,}935}}$

b) $\gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mu - 980}{3} = 2{,}326 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = 986{,}96}}$

2. Beispiel:

Eine Kaffeepulverdose besitzt ein bestimmtes Gewicht (in g). Das Gewicht dieser Dose sei durch die Zufallsvariable X beschrieben, welche $N(20;\ 2{,}5)$ - verteilt ist.
Die Füllmenge (in g) Y sei unabhängig vom Dosengewicht $N(500;\ 6)$ - verteilt.

a) Wir nehmen an, dass ein Überlaufen der Dose beim Abfüllvorgang nicht möglich ist. Das Gesamtgewicht wird deshalb durch die Zufallsvariable $X + Y$ beschrieben. Wie sehen nun der Erwartungswert und die Varianz aus ?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht einer zufällig ausgewählten Dose größer ist als 530 ?

Lösung zum 2. Beispiel:

a) $E(X+Y) = 20 + 500 = 520$

$Var(X+Y) = 2{,}5^2 + 6^2 = 42{,}25$

$\Rightarrow N(520;\ \sqrt{42{,}25})$

b) $P(X+Y \geq 530) = 1 - P(X+Y \leq 530) = 1 - \Phi\left(\dfrac{530-520}{\sqrt{42{,}25}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}54) \approx 0{,}062$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\underline{\underline{6{,}2\%.}}$

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben I

1. Eine Bäuerin hat noch 20 Eier in ihrer Vorratskammer. Drei davon sind verdorben.
Um einen Kuchen zu backen wählt sie zufällig vier Eier aus.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der verdorbenen Eier unter den vier ausgewählten.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

b) Zeichne nun das dazugehörige Stabdiagramm und die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

c) Berechne die Standardabweichung σ und den Erwartungswert μ.

2. Robert liebt das Wetten. Jedesmal wenn er sieben Menschen an einem Ort zusammen sieht wettet er mit jeder Person die dazu bereit ist, 200:1, dass sich darunter mindestens zwei Menschen befinden, die am gleichen Wochentag geboren sind.
Handelt es sich für Robert um eine günstige Wette ? Entscheide dich mit Hilfe einer Rechnung !

3. Wie viele Rosinen muß ein Bäcker in 1kg Teig mischen, damit in einem 50 g schweren Brötchen mit einer nicht kleiner als 99%igen Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Rosine ist ?

4. Sepp und Fred haben im zollfreien Gebiet zu viele zollfreien Zigaretten und auch zuviel Alkoholika gekauft. Sie sind mit einer Reisegruppe (25 Personen) unterwegs, die an der Grenze angibt keinerlei Schmuggelware bei sich zu haben. Die Zöllner führen trotzdem Stichproben-Durchsuchungen durch. Aus der Reisegruppe suchen sie sich das Gepäck von drei Personen aus und durchsuchen es.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) werden weder Sepp noch Fred ausgewählt ?

b) werden Sepp und Fred erwischt ?

c) wird nur Fred beim Schmuggeln ertappt ?

5. Aus Spaß werden Faschingskrapfen häufig mit Senf gefüllt. Lehrling Lars hat allerdings übertrieben und in 40% aller Krapfen Senf eingespritzt. Der Meister Müller überprüft die Arbeit von L und schneidet solang Krapfen auf, bis er zwei mit Senf gefüllte findet. Höchstens schneidet M allerdings fünf Krapfen auf.
X sei die Anzahl der aufgeschnittenen Krapfen.

a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.

b) Berechne den Erwartungswert $E(X)$, die Varianz $Var(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Zufallsgröße X.

c) In einem Korb liegen 50 der von L bearbeiteten Krapfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mindestens 15 und höchstens 25 mit Senf gefüllte Krapfen befinden ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben I

6. Ein Zufallsexperiment gelingt mir einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$.

a) Der Versuchsleiter führt eine Serie von sechs Versuchen durch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingen alle sechs Ausführungen des Zufallsexperimentes ?

b) Wie viele solcher Sechserserien muss der Versuchsleiter mindestens durchführen, wenn er mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit wenigstens eine komplette Serie mit sechs gelungenen Versuchsausführungen erhalten will ?

7. Eine Umfrage hat ergeben, dass es in unserer Bevölkerung 4% farbenblinde Menschen gibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 200 Personen höchstens 7 Farbenblinde zu finden ?

b) Wie viele Personen müssen mindestens untersucht werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens eine farbenblinde Person zu finden ?

8. Im Brieftaubensport ist es üblich, dass ein Expertengremium darüber entscheidet, welche Brieftauben zur Zucht verwendet werden dürfen. Es stehen fünf Prüfer zur Verfügung, von denen drei als „normal“ und zwei als „sehr streng“ bekannt sind. Jede Taube wird von zwei Prüfern bewertet, die vorher durch das Los entschieden werden.
X sei die Anzahl der strengen Prüfer.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und die Verteilungsfunktion F.

b) Berechne den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$ der Zufallsgröße.

9. Der Erwartungswert $E(X) = \mu = 100$ und die Varianz $Var(X) = \sigma^2 = 64$ einer Zufallsvariable X seien bekannt.

a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

(1) $2 \cdot X + 4$ (2) $4 \cdot X - 400$ (3) $\dfrac{X - 100}{8}$

b) Berechne von folgenden Zufallsvariablen den Erwartungswert.

(1) X^2 (2) $2 \cdot X^2 + 4$ (3) $(X - 1)^2$

10. In einer Kiste befinden sich 50 Werkstücke. Es haben sich darunter 9 fehlerhafte Stücke eingeschlichen. Ohne Zurücklegen entnimmt Hans nun zufällig zehn Stücke.
X sei die Anzahl der fehlerhaften Stücke in der Stichprobe.

a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Wie lauten diese beiden Kenngrößen aus a) beim Ziehen mit Zurücklegen ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben II

1. In der Zeit von 13.55 Uhr bis 14.00 Uhr passieren in einem Kaufhaus noch einige Kunden schnell die Kasse, bevor sie zurück zu Ihrer Arbeitsstelle müssen. Die Anzahl dieser Kunden ist poissonverteilt mit $\lambda = 5$.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem oben genannten Zeitraum an einem ganz bestimmten Tag

(1) keine Kunden die Kasse passieren ?

(2) mehr als fünf Kunden noch schnell einen Einkauf tätigen ?

(3) zwei oder drei Kunden die Kasse passieren ?

b) Der Geschäftsführer des Kaufhauses beobachtet während der nächsten 30 Tage das Verhalten an den Kassen für die oben genannte Zeit.

(1) Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der genannten Zeitabschnitte an, in denen mehr als fünf Kunden die Kasse passieren. Um welche Verteilung handelt es sich ?

(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies an mehr als zehn Tagen eintritt ?

2. Bei einer Karnevalsveranstaltung werden zufällig 500 Personen befragt.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Personen mindestens eine am Tag der Veranstaltung Geburtstag hat.

3. Ein neuer Roman umfasst insgesamt 400 Seiten. Leider sind 40 Druckfehler enthalten.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die 5. Seite des Romans mehr als einen Druckfehler enthält.

4. Telefonate die in einem nicht zu groß gewählten Zeitintervall geführt werden sind poissonverteilt. In einem Call-Center gehen im Durchschnitt 5 Anrufe pro Stunde ein.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) innerhalb einer Stunde drei Anrufe im Call-Center eingehen.

b) innerhalb von 40 min drei Anrufe im Call-Center eingehen.

5. Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Zufallsvariablen X und Y habe die folgenden Werte:

X \ Y	1	2	3
1	0,1	0,3	0,2
2	0,1	0,1	0,2

a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

b) Berechne danach jeweils den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $Z_1 = X + Y$ und $Z_2 = X \cdot Y$.

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben II

6. Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und haben die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

x	1	2	3
$P(X=x)$	0,4	0,5	0,1

y	0	1
$P(Y=y)$	0,6	0,4

a) Berechne den jeweiligen Erwartungswert und die jeweilige Varianz sowie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion.

b) Berechne anschließend die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable $Z = X + Y$.

7. Aufgrund langjähriger Erfahrung weiß ein Versicherungsunternehmen, dass im Mittel 1‰ der Versicherten pro Jahr in einen Unfall verwickelt werden. Der gesamte Versicherungsbestand beläuft sich auf 3000 Kunden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 7 Versicherte während eines Jahres in einen Unfall verwickelt sind ?

8. Ein Pharmazkonzern bringt ein neues Medikament auf den Markt. Mit der Wahrscheinlichkeit von 0,001 tritt bei diesem Medikament die Nebenwirkung „Übelkeit“ auf. 2000 Patienten nehmen diese Medizin nun ein.

Berechne wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei k Patienten Übelkeit auftritt für $k = 0, 1, ... 7$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als sieben Personen die genannte Nebenwirkung auftritt ?

9. Wir nehmen an, dass der geübte Sportschütze Thomas bei einem Schuß, das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 trifft. Thomas bietet seinen Freunden eine Wette an: Er schießt 20 mal auf die Zielscheibe. Sollte er bei diesen 20 Schüssen mindestens 17 Treffer landen, erhält er 100 Euro. Gelingt ihm das nicht, muss er selbst 500 Euro bezahlen.

a) Wie hoch ist die Gewinnerwartung von Thomas ?

b) Wie darf der Betrag höchstens sein den Thomas im Falle eines Verlustes zahlt, damit er auf Dauer nicht verliert ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben II

10. Ein L-Tetraeder ist auf den Seitenflächen durch die Ziffern 1,2,3,4 gekennzeichnet. Der Mathelehrer wirft den Tetraeder nun solange, bis die erste 1 auf der Standfläche erscheint, höchstens jedoch fünfmal.
Die Zufallsvariable X sei dabei die Anzahl der Versuche.
Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne $E(X)$, $Var(X)$ und $\sigma(X)$.

11. Als Eintrittsnachweis für eine Karnevalsveranstaltung sollen die Besucher an der Eingangstüre eine blinkende Anstecknadel erhalten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5% ist eine solche Nadel defekt und blinkt nicht. In weiser Voraussicht, haben die Veranstalter mit dem Hersteller der Nadeln vereinbart, dass sie die Lieferung zurückweisen können, wenn in einem Karton mit 500 Anstecknadeln mindestens fünf defekte zu finden sind. Berechne wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, das die Veranstalter die Lieferung zurückgeben! Verwende dazu als Näherung der Binomialverteilung die Poissonverteilung.

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben III

1. Die Zufallsgröße X sei normalverteilt und besitze folgenden Erwartungswert und folgende Varianz:

$$\mu = 105\,;\quad \sigma^2 = 100$$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten

a) $P(X \leq 100)$

b) $P(X > 106)$

c) $P(|X - 105| > 30)$.

2. Eine Maschine packt Chips in dafür vorgesehene Tüten ab. Die Gewichte seien normalverteilt. Die Standardabweichung $\sigma = 3$ ist immer konstant, während der Erwartungswert μ eingestellt werden kann. (Anm: Daran kann man erkennen, dass σ von der für μ gewählten Einstellung unabhängig ist.)

Auf jeder Packung Chips ist als Mindestgewicht 1000 g eingeprägt.

Wie muß der Inhaber der Firma nun μ einstellen, damit bei

a) 95%

b) 99%

c) 99,9% der Packungen die Einprägung (Mindestmenge 1000 g) auch wirklich zutrifft ?

3. Im Supermarktregal stehen Mehlpakete mit der Aufschrift „Mindestgewicht 980g“. Diese Pakete seien ungefähr $N(985;\ 4)$-verteilt.

Hausfrau Maria will für einen Geburtstag mehrere Kuchen backen und hat deshalb vor 10 Pakete Mehl zu kaufen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein von Maria zufällig ausgewähltes Paket leichter ist als 980g ?

b) Wie ist das Gesamtgewicht der gesamten 10 Pakete (unter der Annahme der Unabhängigkeit) verteilt ?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht geringer ist als 9800 g ?

4. Die Kollegstufe schreibt eine Geschichtsklausur, bei welcher die Anzahl der Punkte, die maximal erreicht werden kann ungefähr normalverteilt ist. Der Erwartungswert liegt bei $\mu = 22$ und die Streuung bei $\sigma = 6$.

Der Lehrer hat sich zum Ziel gesetzt, dass während seiner gesamten Schullaufbahn im langjährigen Durchschnitt immer ca. 10% der Schüler die Note „Eins“ erhalten.

Ab welcher Punktezahl sollte er, unter Berücksichtigung dieses Zieles, dann die Note „sehr gut“ vergeben ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben III

5. Leere Wasserflaschen eines bekannten Herstellers besitzen ein normalverteiltes Gewicht, den Erwartungswert $\mu = 100$ g und die Standardabweichung $\sigma = 5$ g.
Die Abfüllung der Flaschen läuft nach einem bestimmten Schema ab:
Die leeren Flaschen werden nacheinander auf eine Waage gestellt. Die Zufuhr von Wasser wird erst dann gestoppt, wenn als Gesamtgewicht 610 g erreicht sind.
Man nehme an, dass die Flaschen ausreichend groß sind und ein Überlaufen deshalb unmöglich ist.

a) Gib die Verteilung der Zufallsgröße *X* des Füllgewichtes an, wenn das Gesamtgewicht (Flaschen + eingefülltes Wasser) exakt 610 g beträgt !

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Inhalt mindestens 500 g beträgt ?

c) Durch einen technischen Mangel kann der Zulauf beim Erreichen des Gesamtgewichtes von 610 g (= Grenze) nicht abrupt gestoppt werden.
Die Wassermenge, die nach dem Erreichen dieser Grenze noch in die Flasche hineinläuft, habe die Verteilung $N(3;\ 0{,}5)$.
Welche Verteilung hat nun unter diesen Umständen das Füllgewicht ?

6. Eine Maschine stellt Werkstücke einer bestimmten Länge her.
Die Zufallsvariable *X* beschreibe diese Länge und sei normalverteilt mit $\mu = 30$ mm und einer Standardabweichung von 0,04 mm.
Ein Werkstück ist genau dann Ausschuss, wenn seine Länge vom Sollwert 30 mm mehr als 0,1 mm abweicht.

a) Gib an, mit wie viel Prozent Ausschuss der Firmeninhaber auf die Dauer rechnen muss !

b) Auf Grund eines technischen Problems hat sich μ um 0,03mm vergrößert.
Die Standardabweichung ist dagegen unverändert geblieben.
Wie hoch ist jetzt der Ausschuss (Angabe in Prozent !) ?

